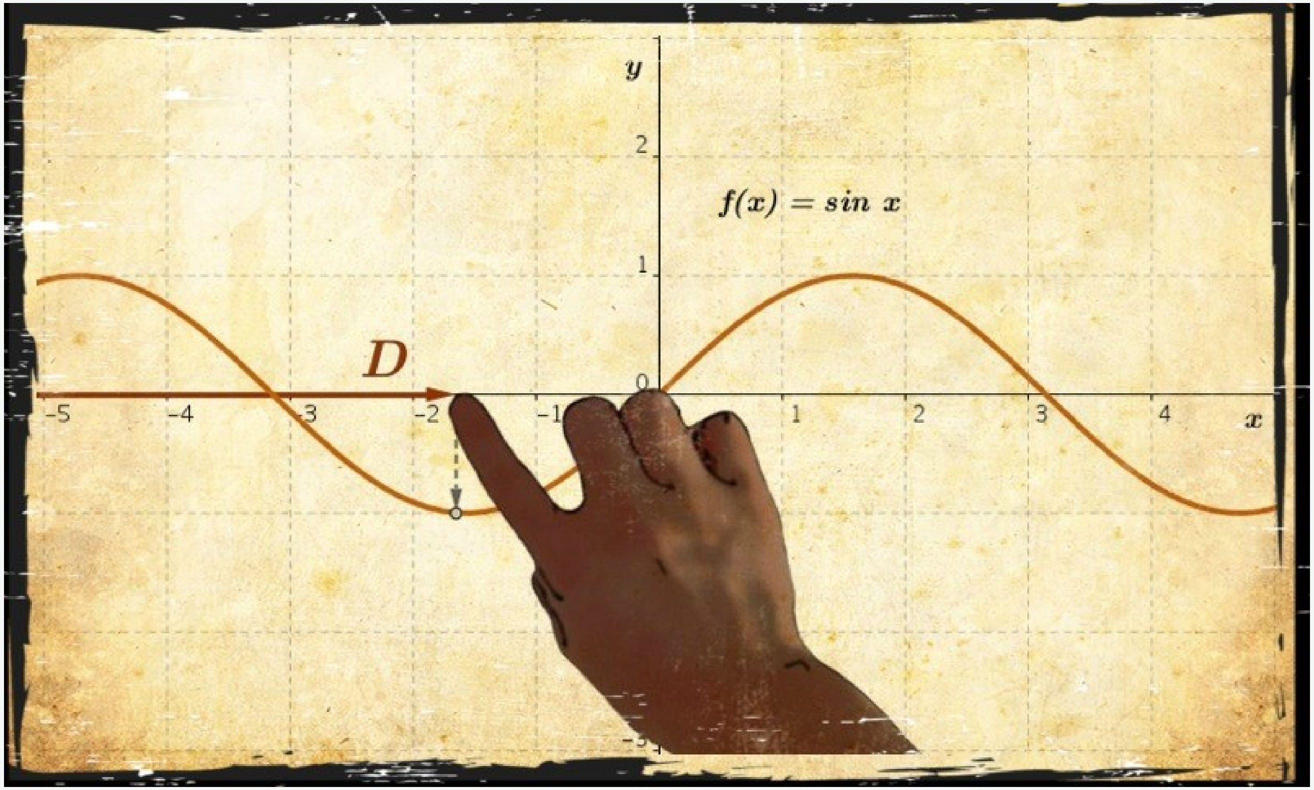
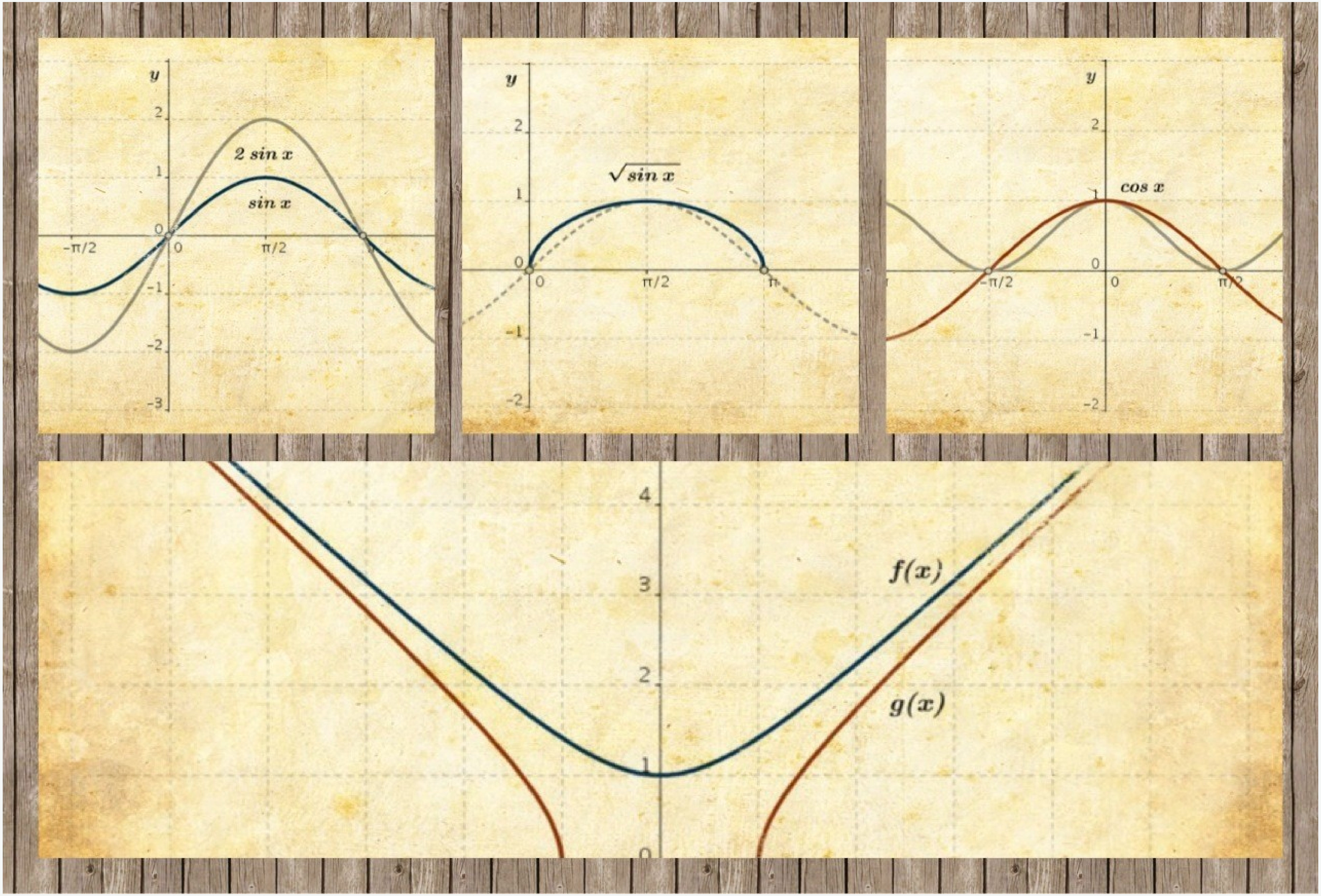


Definitions- und Wertebereich von Funktionen und Relationen


y
2 sin x
sin x
−π/2
0
π/2
√sin x
cos x
f(x)
g(x)


STRÖER
y
2
cos x
1
0
-1
-2

Definition:

Unter einer Funktion versteht man eine Vorschrift, die jedem Element x aus einer Menge D genau ein Element y aus einer Menge W zuordnet.

Diese Zuordnung wird durch das Funktionszeichen f in der Form $y = f(x)$ symbolisch ausgedrückt.

x : unabhängige Veränderliche (Variable) oder Argument

y : abhängige Veränderliche (Variable) oder Funktionswert

D : Definitionsbereich der Funktion

W : Wertebereich der Funktion

$y = f(x)$ – Funktionsgleichung, $f(x)$ – Funktionsterm

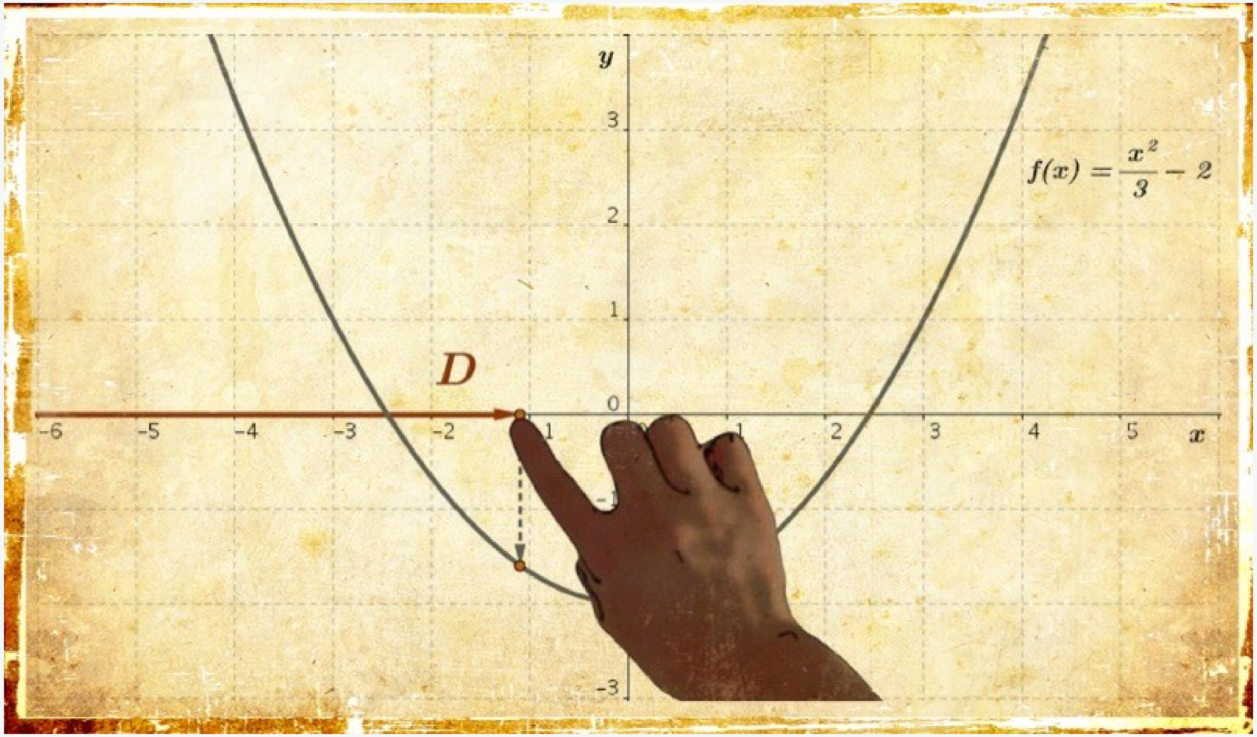


Abb. E-1: Darstellung des Definitionsbereiches einer Funktion

Zur vollständigen Beschreibung einer reellen Funktion gehört die Angabe des Definitionsbereiches $D(f)$. Sehr häufig wird jedoch der Definitionsbereich nicht ausdrücklich angegeben, besonders wenn die Funktion durch einen Term erklärt ist. In diesen Fällen ist es üblich, als Grundmenge die reellen Zahlen anzunehmen und den Definitionsbereich als maximal mögliche Teilmenge von der Menge der reellen Zahlen zu bestimmen, die dieser Funktionsterm zulässt. Man erhält den Definitionsbereich einer Funktion für diejenigen x-Werte, die beim Einsetzen in die Funktionsgleichung reelle Funktionswerte ergeben.

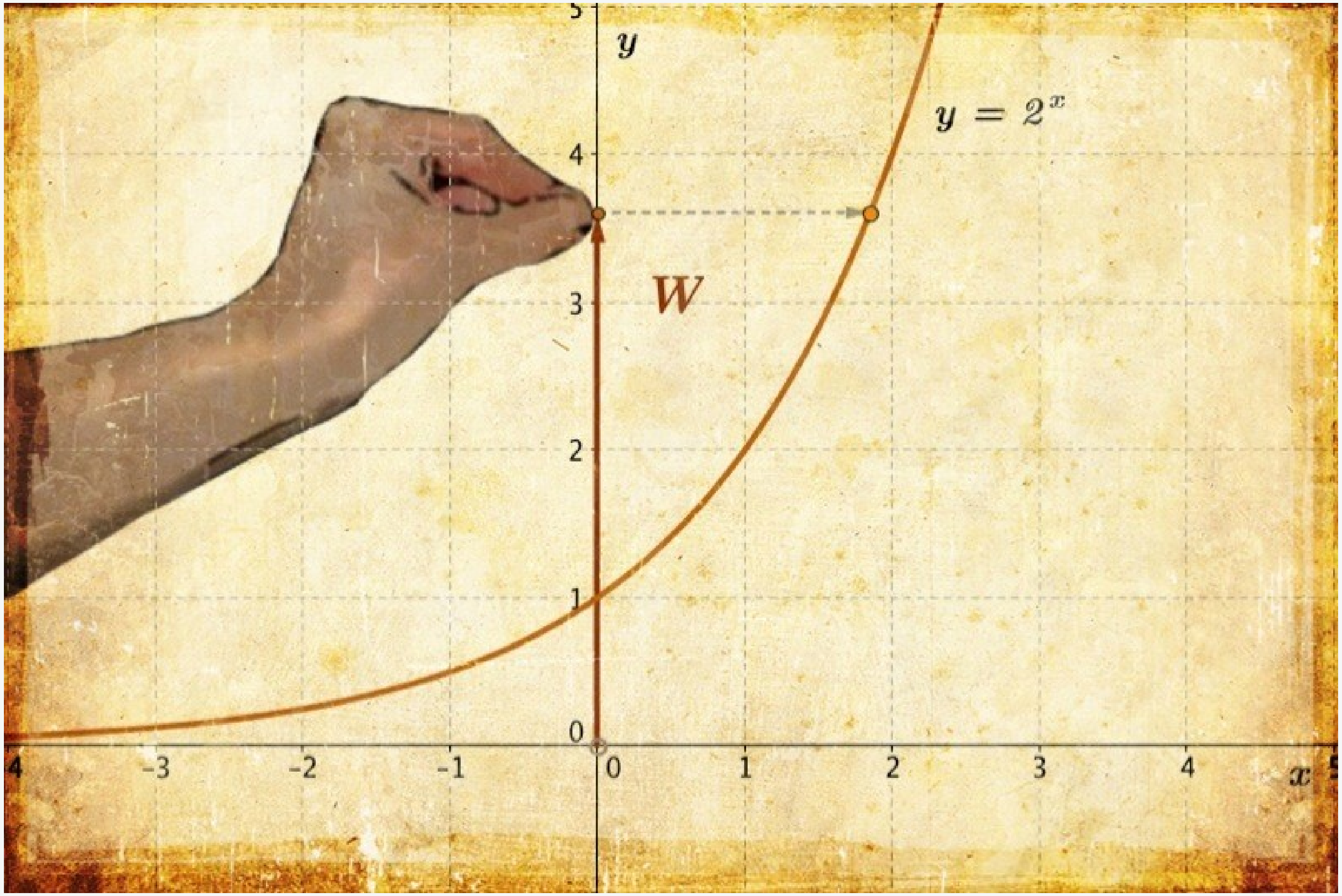


Abb. E-2: Darstellung des Definitionsbereiches einer Funktion

Hat man den Definitionsbereich einer Funktion ermittelt, so lässt sich meist der Wertebereich *W(f)* angeben. Dazu bestimmt man für *x*-Werte des Definitionsbereiches mithilfe der Funktionsgleichung charakteristische Werte, z.B. maximale und minimale Funktionswerte, und untersucht, in welchem Bereich alle Funktionswerte liegen. Bei Relationen verfährt man entsprechend.

Definitionsbereich:

Definitionsbereich einer Funktion ist die Menge aller x-Werte, für die die Funktion definiert ist.

Definitionsbereich einer Relation ist die Menge aller x-Werte, für die die Relation definiert ist.

Wertebereich:

Wertebereich einer Funktion ist die Menge aller y-Werte der Funktion.

Wertebereich einer Relation ist die Menge aller y-Werte der Relation.

In folgenden Beispielen werden Definitionsbereich und Wertebereich von einigen Funktionen und Relationen erklärt:

$$1)\ y = \sin x$$

$$2)\ y = \frac{x^2}{2} - 1$$

$$3)\ y = \sqrt{x + 2}$$

$$4)\ y = \sqrt{4 - x^2}$$

$$5)\ y^2 = x + 2$$

$$6)\ x^2 + y^2 = 4$$

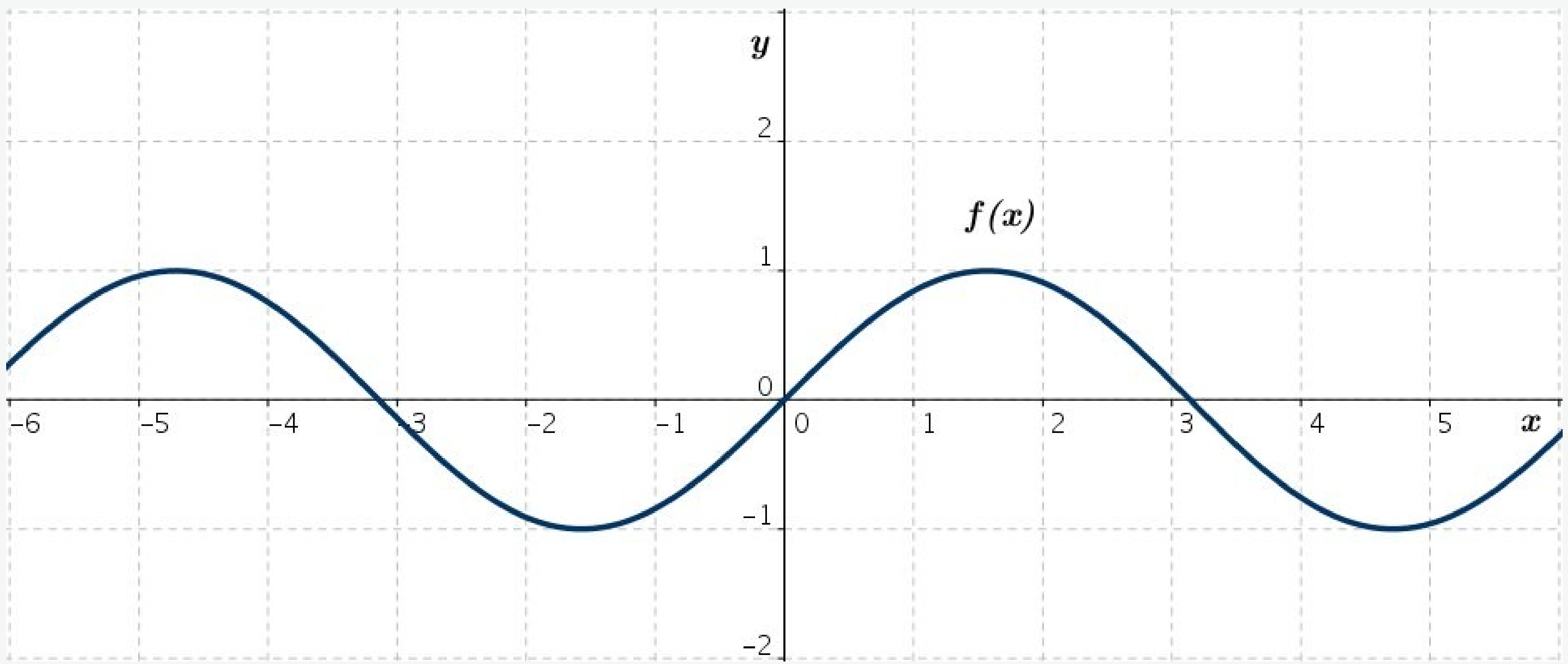


Abb. B1: Die Funktion $y = f(x)$

$$f(x) = \sin x\,, \qquad D = \mathbb{R}\,, \qquad W = [-1,\ 1]$$

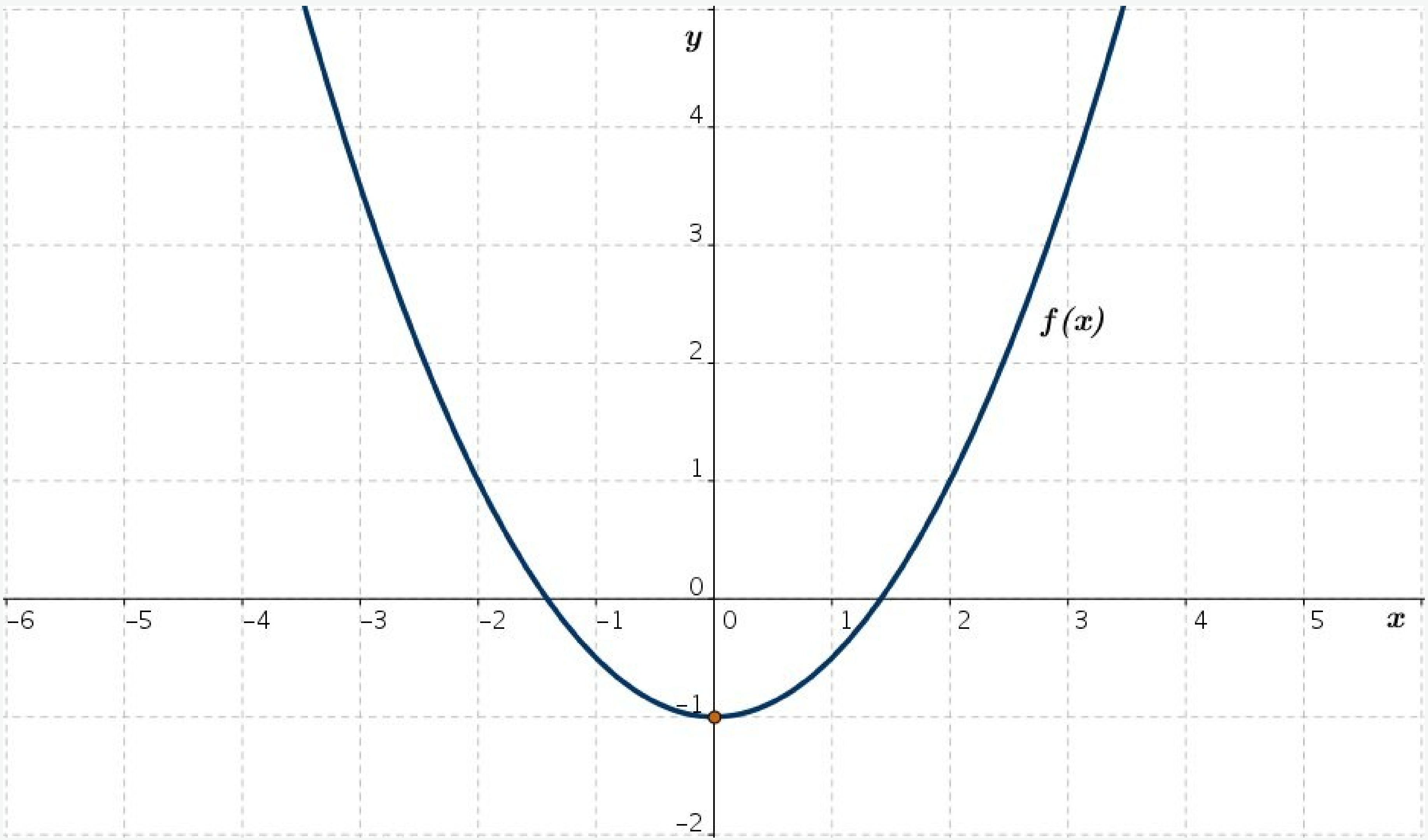


Abb. B2: Die Funktion $y = f(x)$

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - 1, \qquad D = \mathbb{R}, \qquad W = [-1, \infty)$$

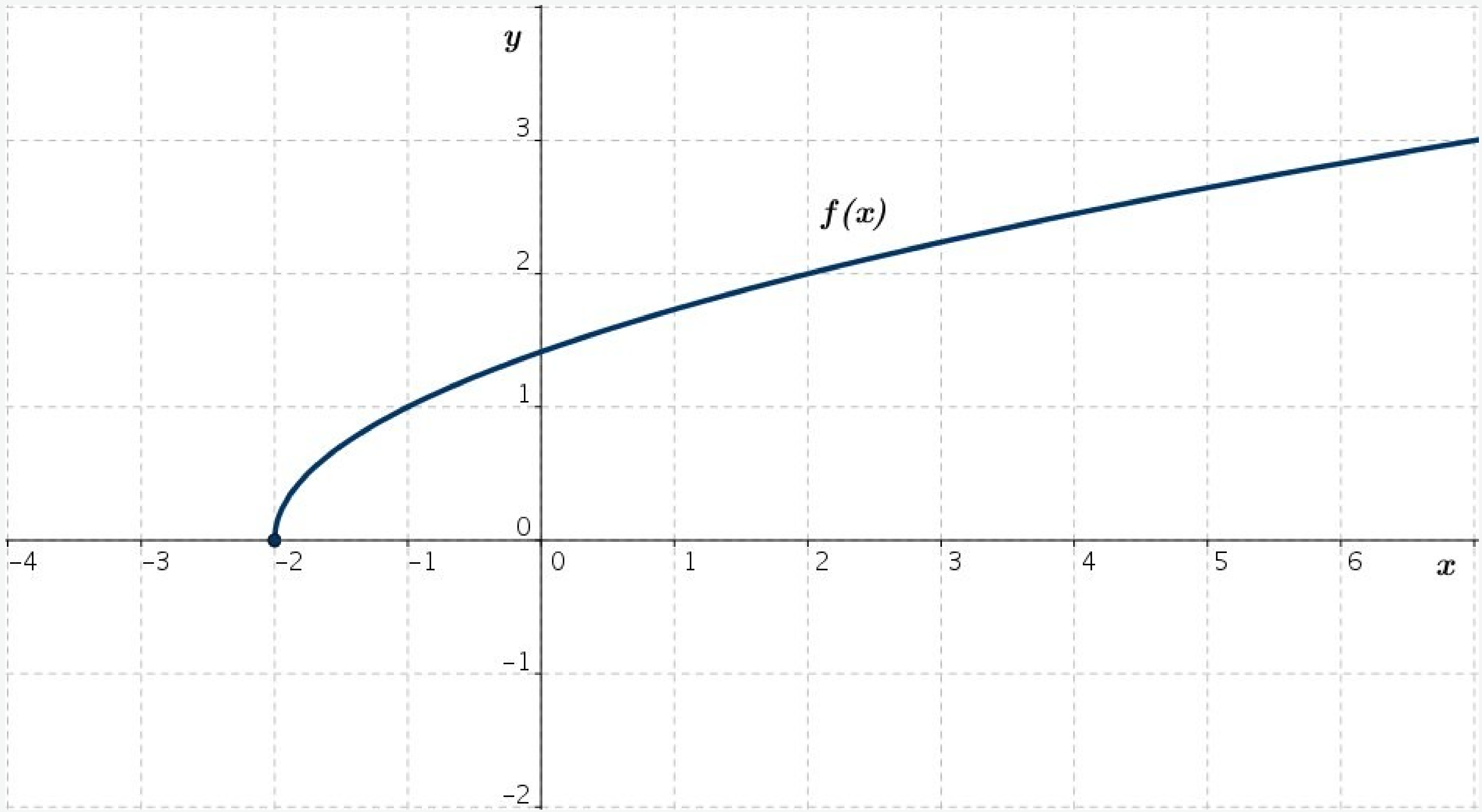


Abb. B3: Die Funktion $y = f(x)$

$$f(x) = \sqrt{x+2}\,, \qquad D = [-2, \infty)\,, \qquad W = [0, \infty)$$

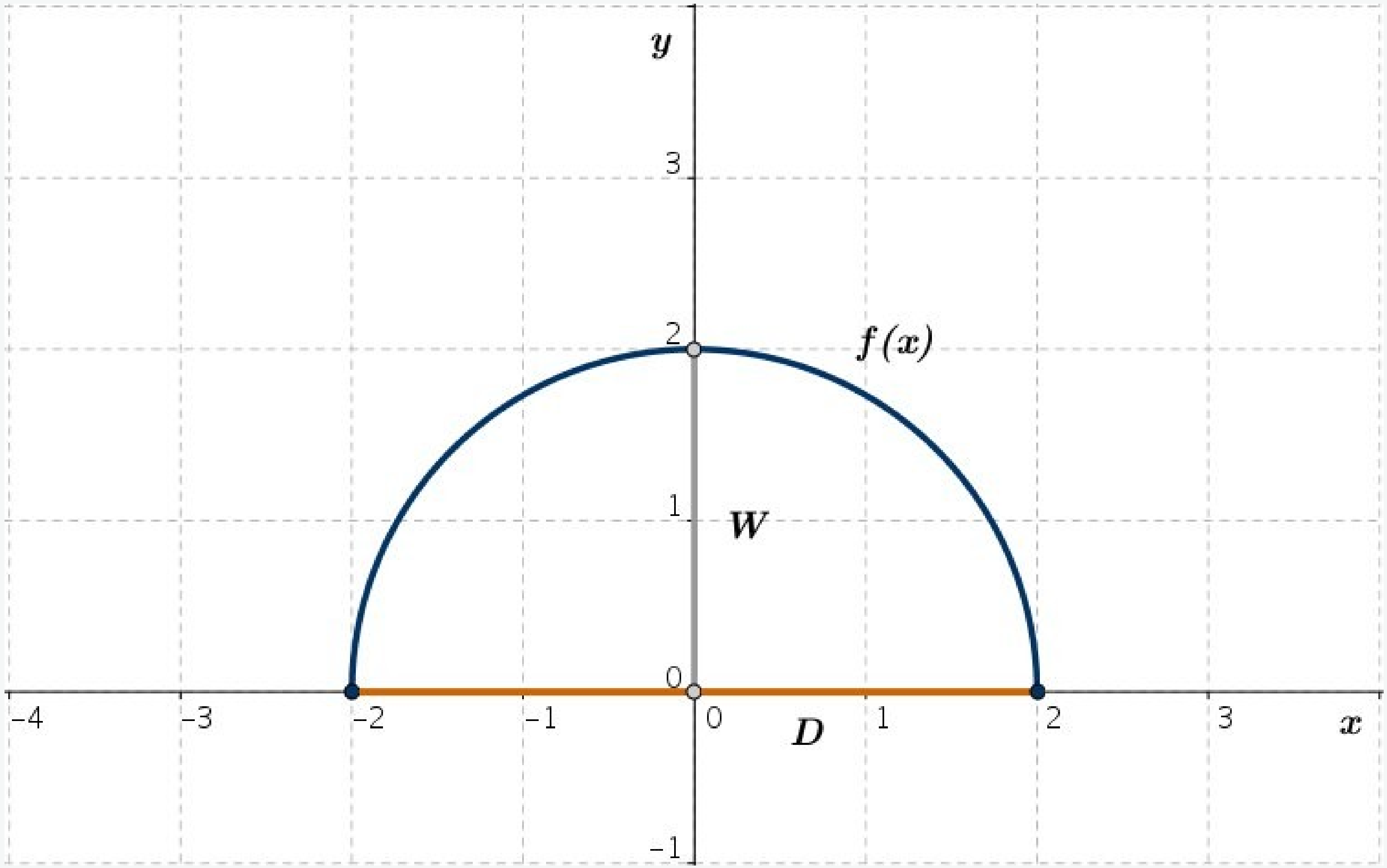


Abb. B4: Die Funktion $y = f(x)$

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}\,, \qquad D = [-2,\ 2]\,, \qquad W = [0,\ 2]$$

Eine Relation: Beispiel 5

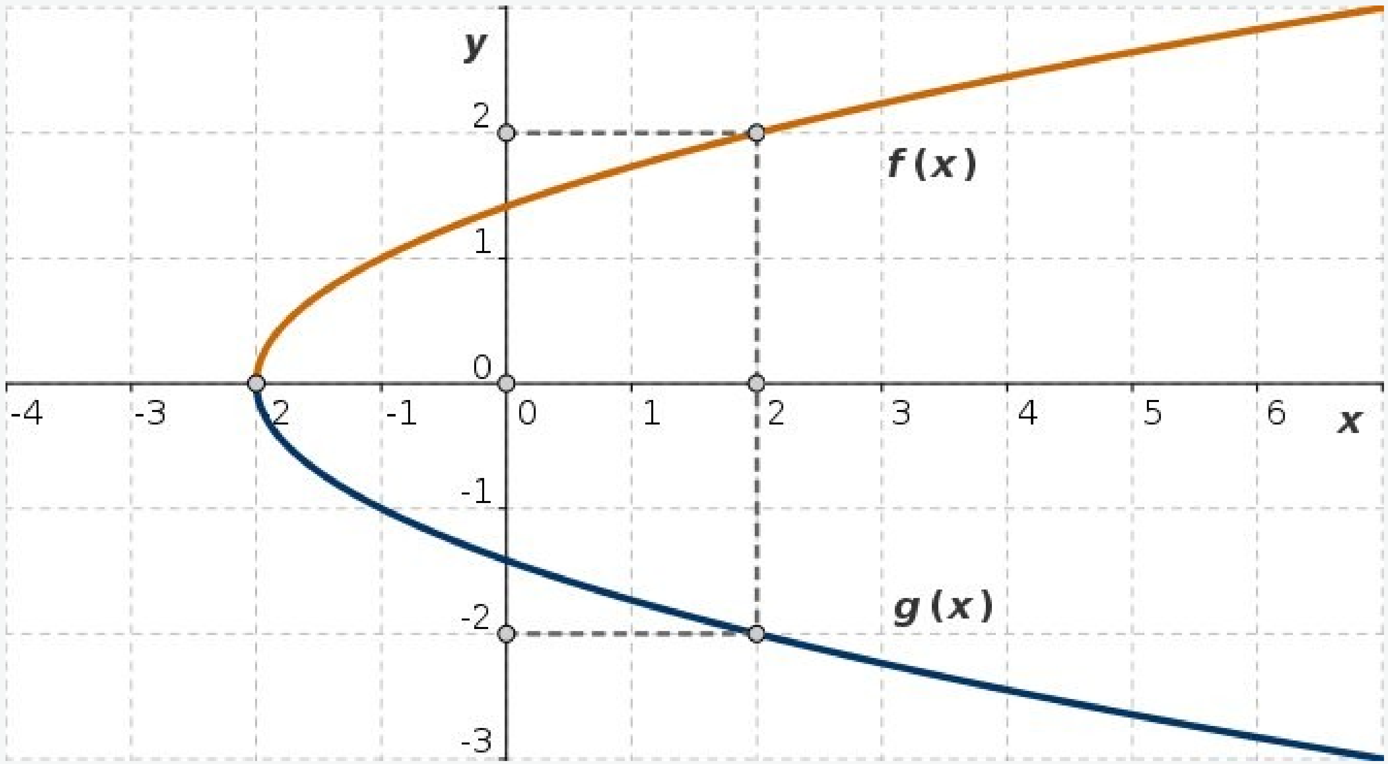


Abb. B5: Die reelle Relation R

$$y^2 = x + 2 \;\; - \text{ Relationsgleichung}$$

$$(R) \quad y^2 = x + 2 \qquad : f(x) = \sqrt{x + 2}\,, \qquad g(x) = -\sqrt{x + 2}$$

$$D(R) = [-2, \infty)\,, \qquad W(R) = \mathbb{R}$$

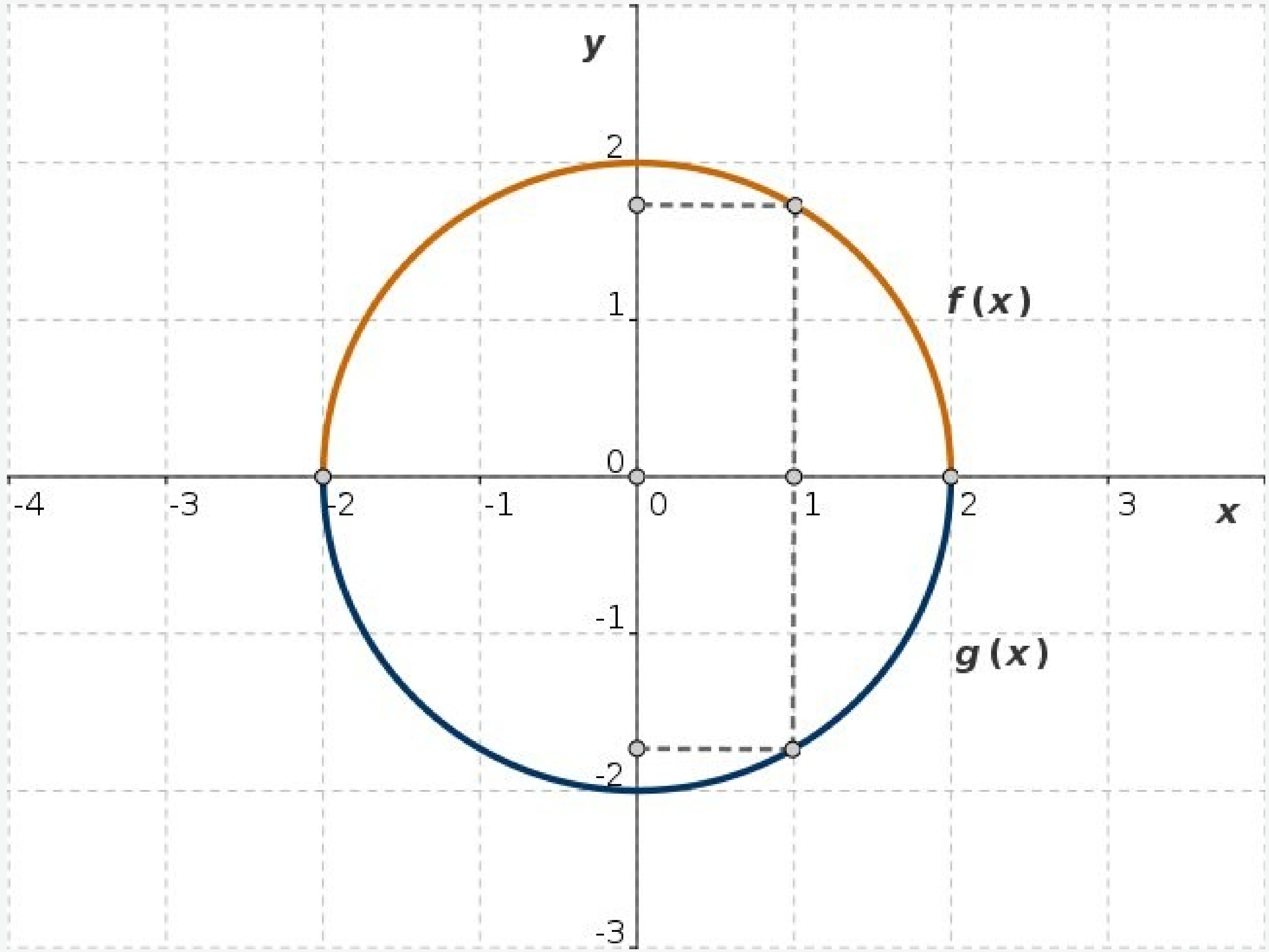


Abb. B6: Die reelle Relation R

$$R \quad : x^2 + y^2 = 4, \qquad f(x) = \sqrt{4 - x^2}, \qquad g(x) = -\sqrt{4 - x^2}$$

$$D(R) = [-2,\ 2], \qquad W(R) = [-2,\ 2]$$

Bestimmen Sie den Definitionsbereich und den Wertebereich der folgenden Funktionen:

Aufgabe 1: $f(x) = x - 2, \qquad g(x) = -2x$

Aufgabe 2: $f(x) = x^2 - 4, \qquad g(x) = -x^2 + 4$

Aufgabe 3: $f(x) = (x+1)^2 - 2, \qquad g(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x$

Aufgabe 4: $f_1(x) = x^3, \qquad f_2(x) = \frac{x^3}{5}, \qquad f_3(x) = -\frac{x^3}{6}, \qquad f_4(x) = -3x^3$

Aufgabe 5: $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x$

Aufgabe 6: $f_1(x) = \frac{1}{x}, \qquad f_2(x) = \frac{1}{x-2}, \qquad f_3(x) = \frac{1}{x+3}$

Aufgabe 7: $f_1(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad f_2(x) = \frac{1}{x^6}, \qquad f_3(x) = \frac{1}{x^{12}}$

Aufgabe 8: $f_1(x) = \frac{1}{x^2 + 1/2}, \qquad f_2(x) = \frac{1}{x^2 + 1/3}, \qquad f_3(x) = -\frac{1}{x^2 + 1}$

Aufgabe 9: $f_1(x) = \sqrt{x}\,, \quad f_2(x) = \sqrt{x-2}\,, \quad f_3(x) = \sqrt{x+1}$

Aufgabe 10: $f(x) = \sqrt{x+2} - 1, \quad g(x) = \sqrt{x-1} + 2$

Aufgabe 11: $f(x) = \sqrt{x^2+1}\,, \quad g(x) = \sqrt{x^2+4}\,, \quad h(x) = \sqrt{x^2+9}$

Aufgabe 12: $f(x) = \sqrt{x^2-1}\,, \quad g(x) = \sqrt{x^2-4}\,, \quad h(x) = \sqrt{x^2-9}$

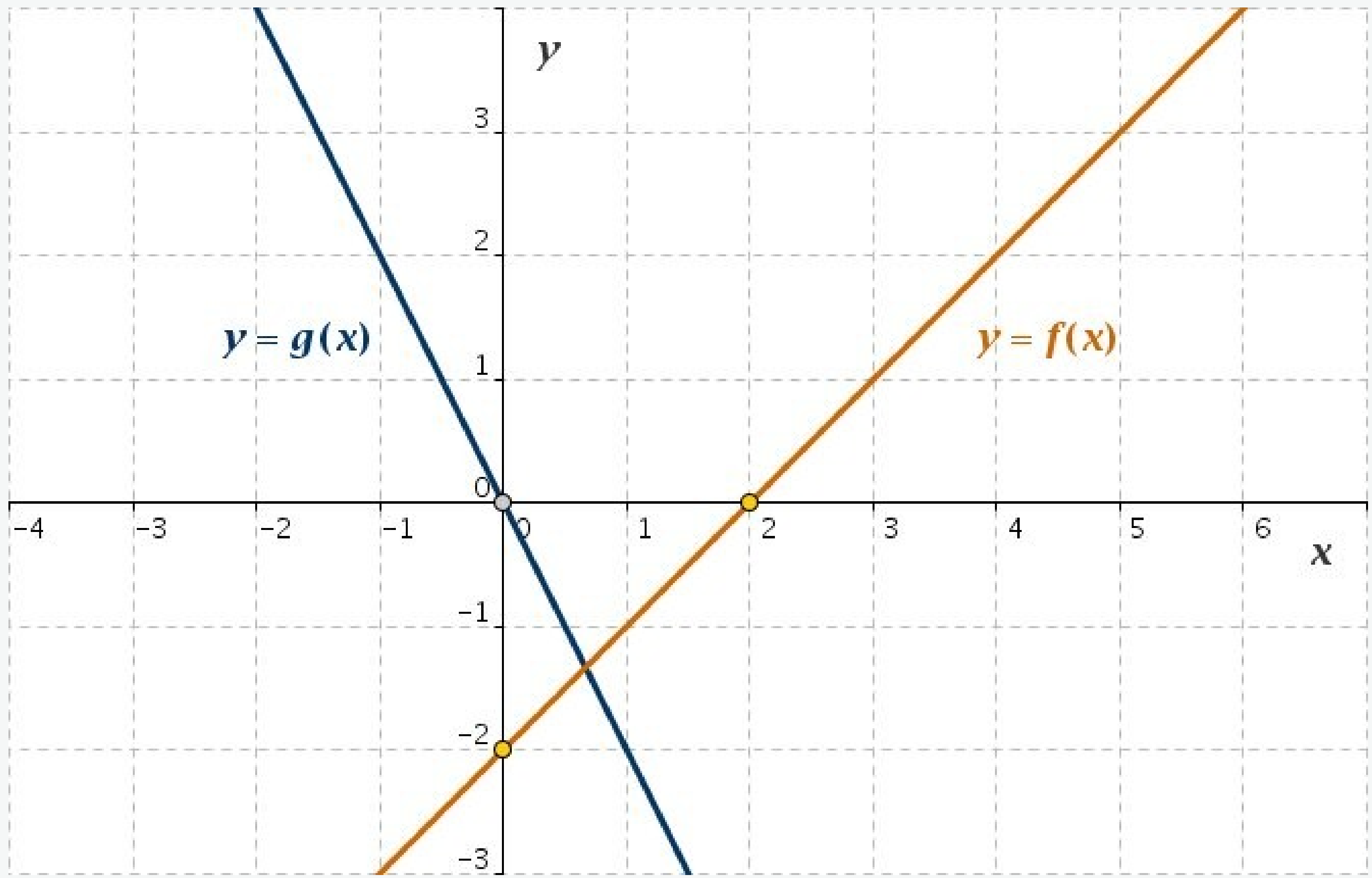


Abb. L1: Lineare Funktionen $y = f(x)$ und $y = g(x)$

$$f(x) = x - 2, \qquad g(x) = -2x$$

$$D(f) = W(f) = \mathbb{R}, \qquad D(g) = W(g) = \mathbb{R}$$

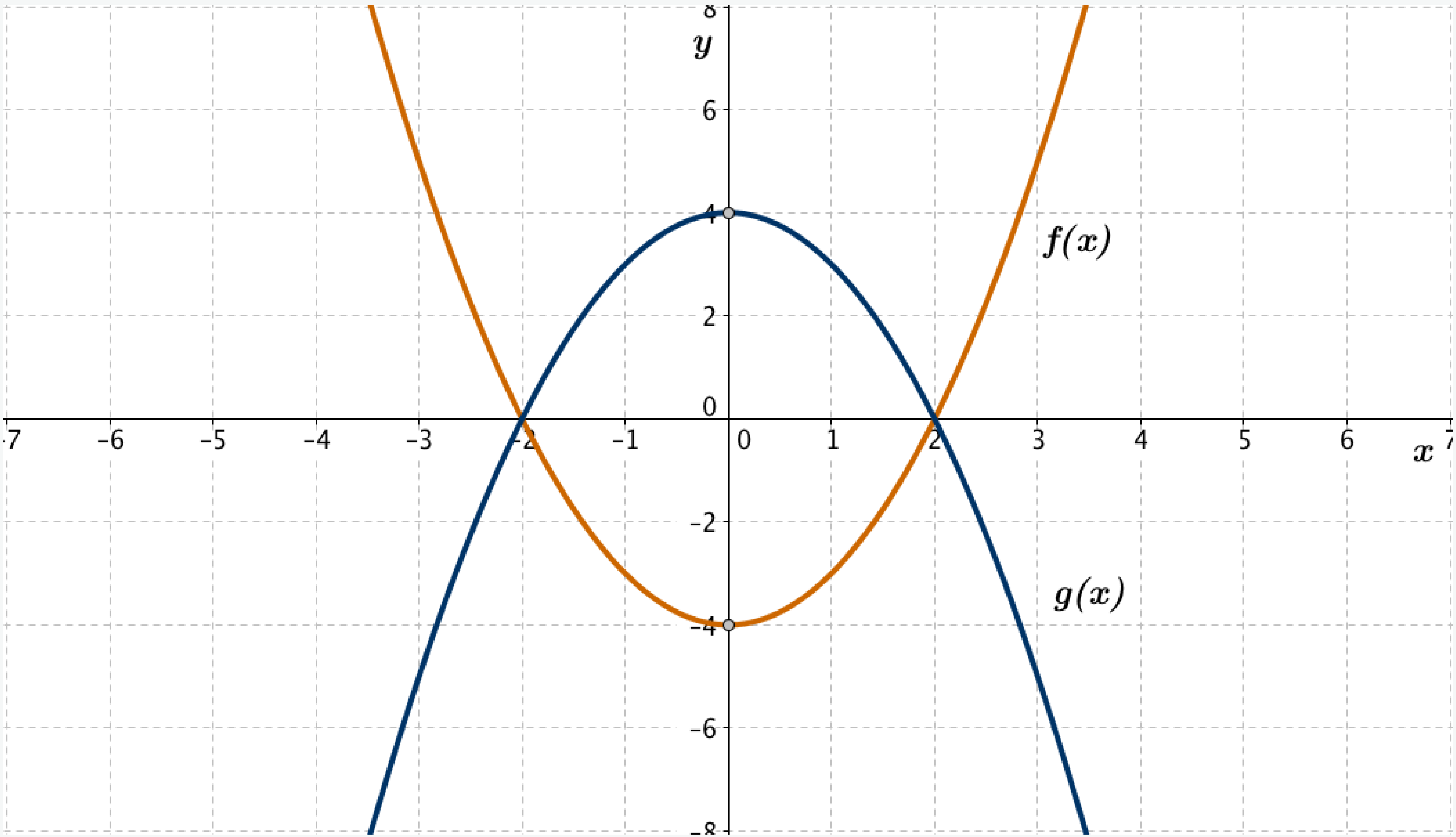


Abb. L2: Quadratische Funktionen $y = f(x)$ und $y = g(x)$

$$f(x) = x^2 - 4, \qquad D(f) = \mathbb{R}, \qquad W(f) = [-4, \infty)$$

$$g(x) = -x^2 + 4, \qquad D(g) = \mathbb{R}, \qquad W(g) = (-\infty, 4]$$

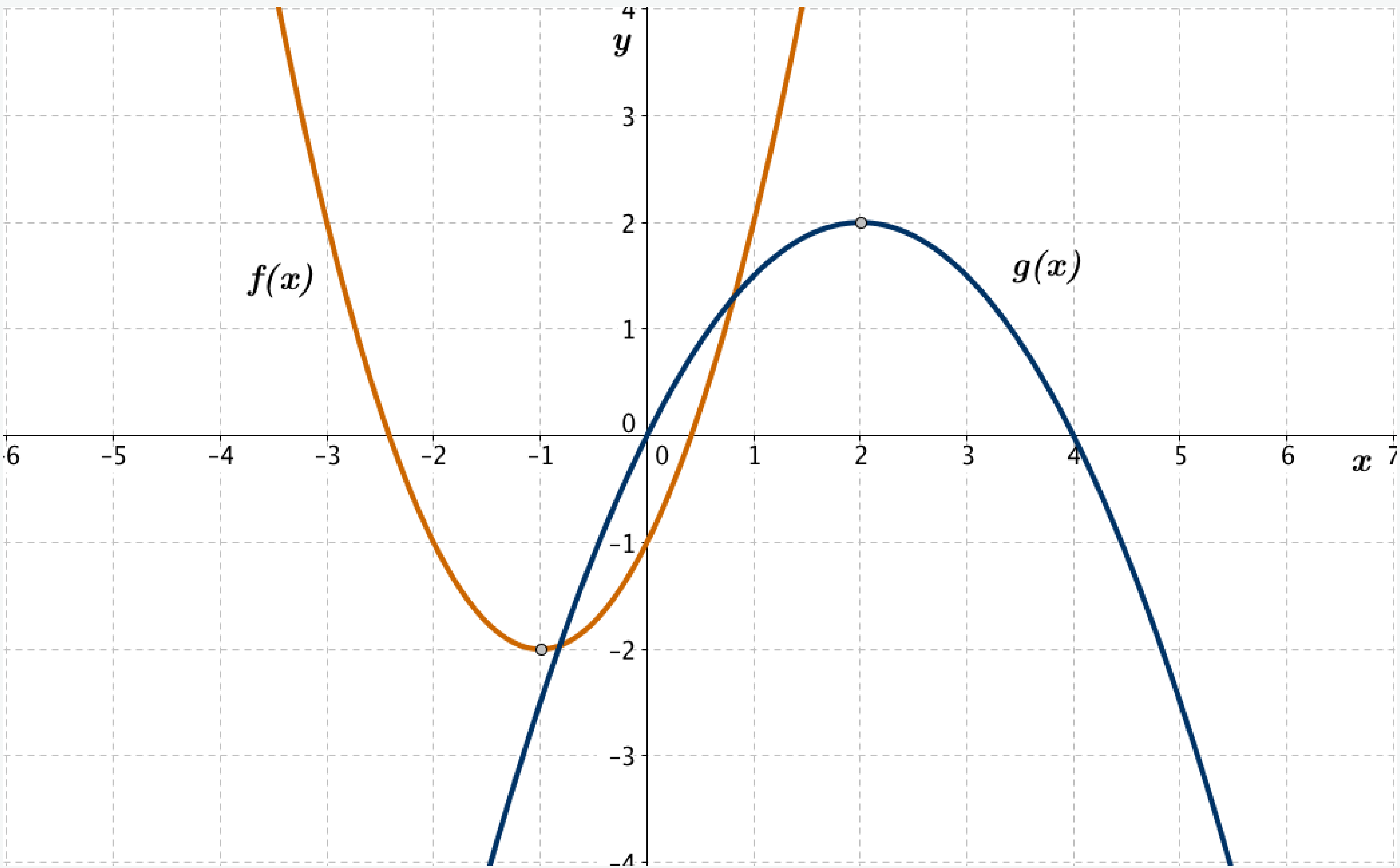


Abb. L3: Quadratische Funktionen $y = f(x)$ und $y = g(x)$

$$f(x) = (x+1)^2 - 2, \quad D(f) = \mathbb{R}, \quad W(f) = [-2, \infty)$$

$$g(x) = -0.5\,x^2 + 2\,x, \quad D(g) = \mathbb{R}, \quad W(g) = (-\infty, 2]$$

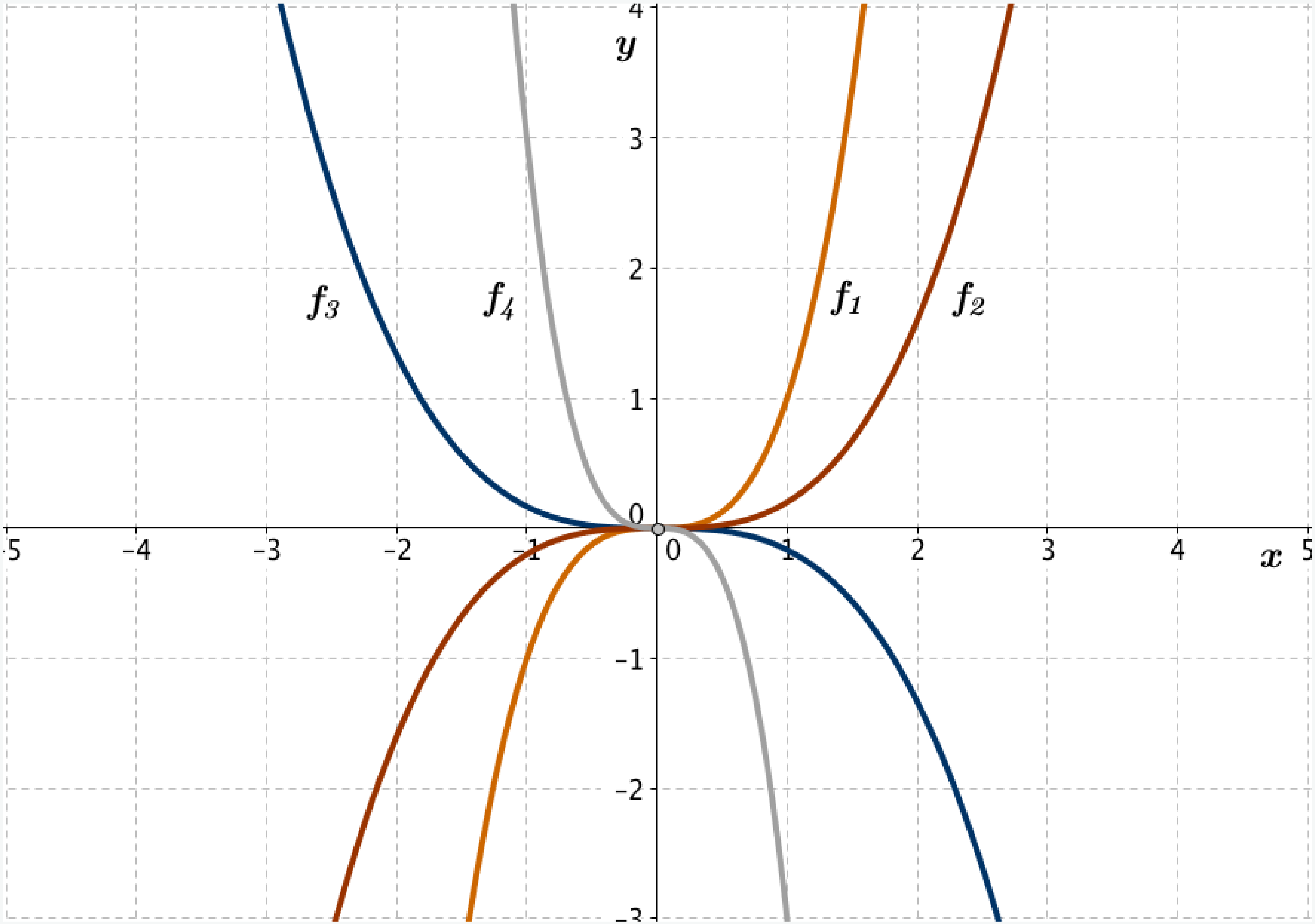


Abb. L4: Kubische Funktionen

$$f_i(x) = a_i x^3, \quad D(f) = \mathbb{R}, \quad W(f) = \mathbb{R}, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{5}, \quad a_3 = -\frac{1}{6}, \quad a_4 = -3$$

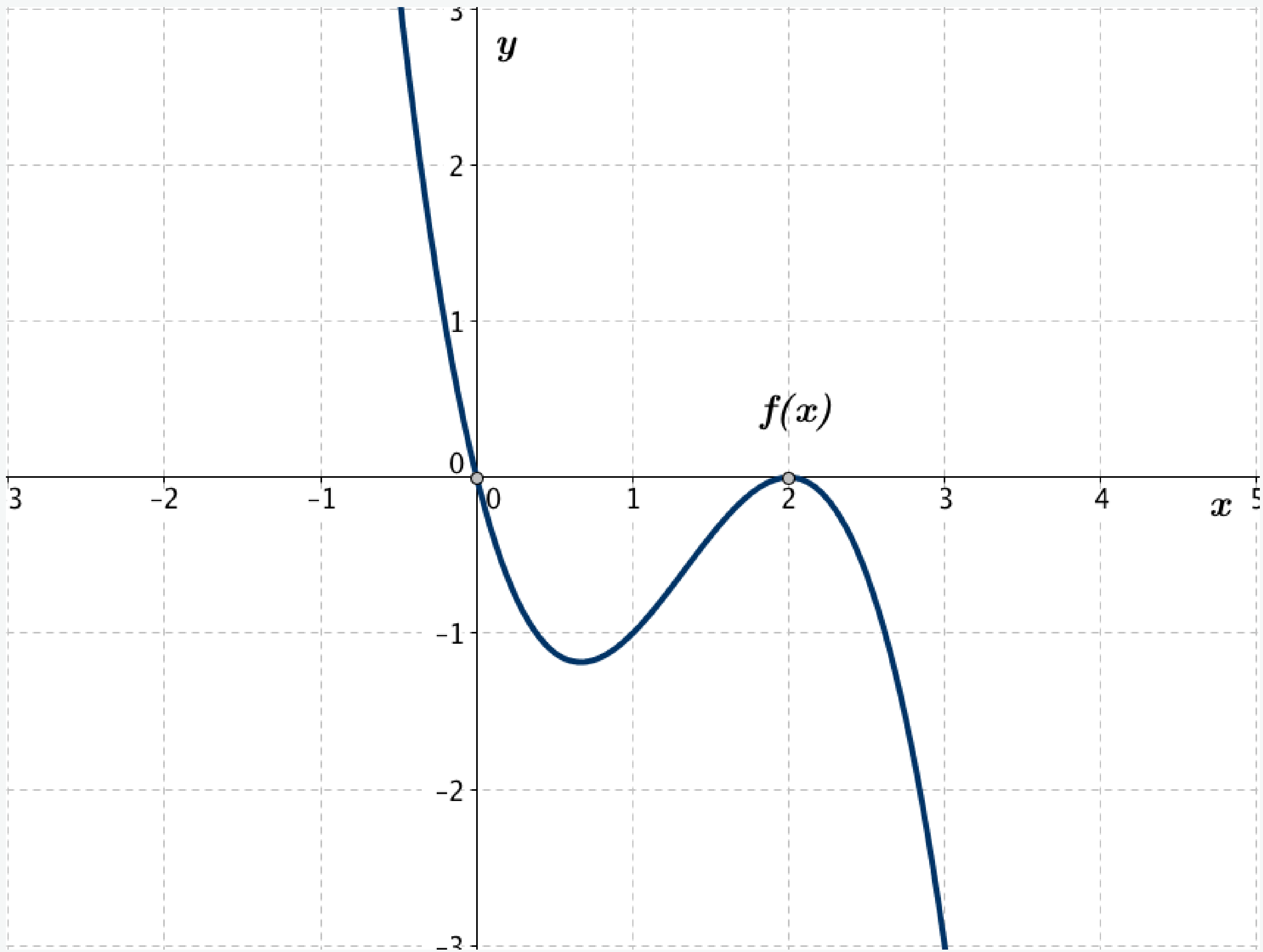


Abb. L5: Kubische Funktion

$$f(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x = x(-x^2 + 4x - 4), \qquad D = W = \mathbb{R}$$

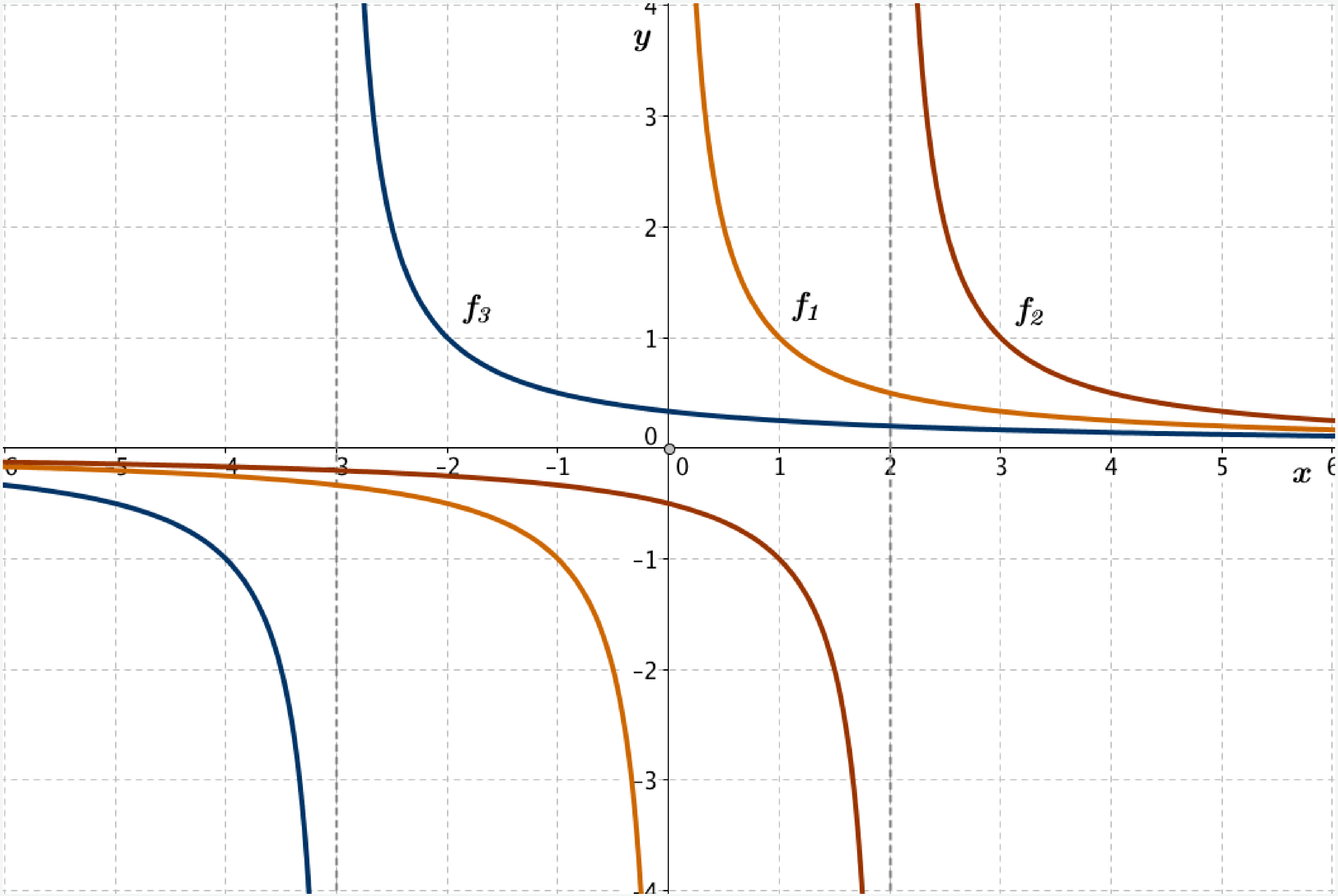


Abb. L6: Gebrochenrationale Funktionen

$$f_1(x) = \frac{1}{x}, \qquad x \neq 0$$

$x = 0$ ist die Definitionslücke. In diesem Punkt die Funktion ist nicht definiert.

$$D(f_1) = W(f_1) = \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$$

$$f_2(x) = \frac{1}{x - 2}, \qquad x \neq 2, \qquad x = 2 \text{ ist die Definitionslücke.}$$

$$D(f_2) = \mathbb{R} \setminus \{ 2 \}, \qquad W(f_2) = \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$$

$$f_3(x) = \frac{1}{x + 3}, \qquad x \neq -3, \quad x = -3 \text{ ist die Definitionslücke.}$$

$$D(f_3) = \mathbb{R} \setminus \{ -3 \}, \qquad W(f_3) = \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$$

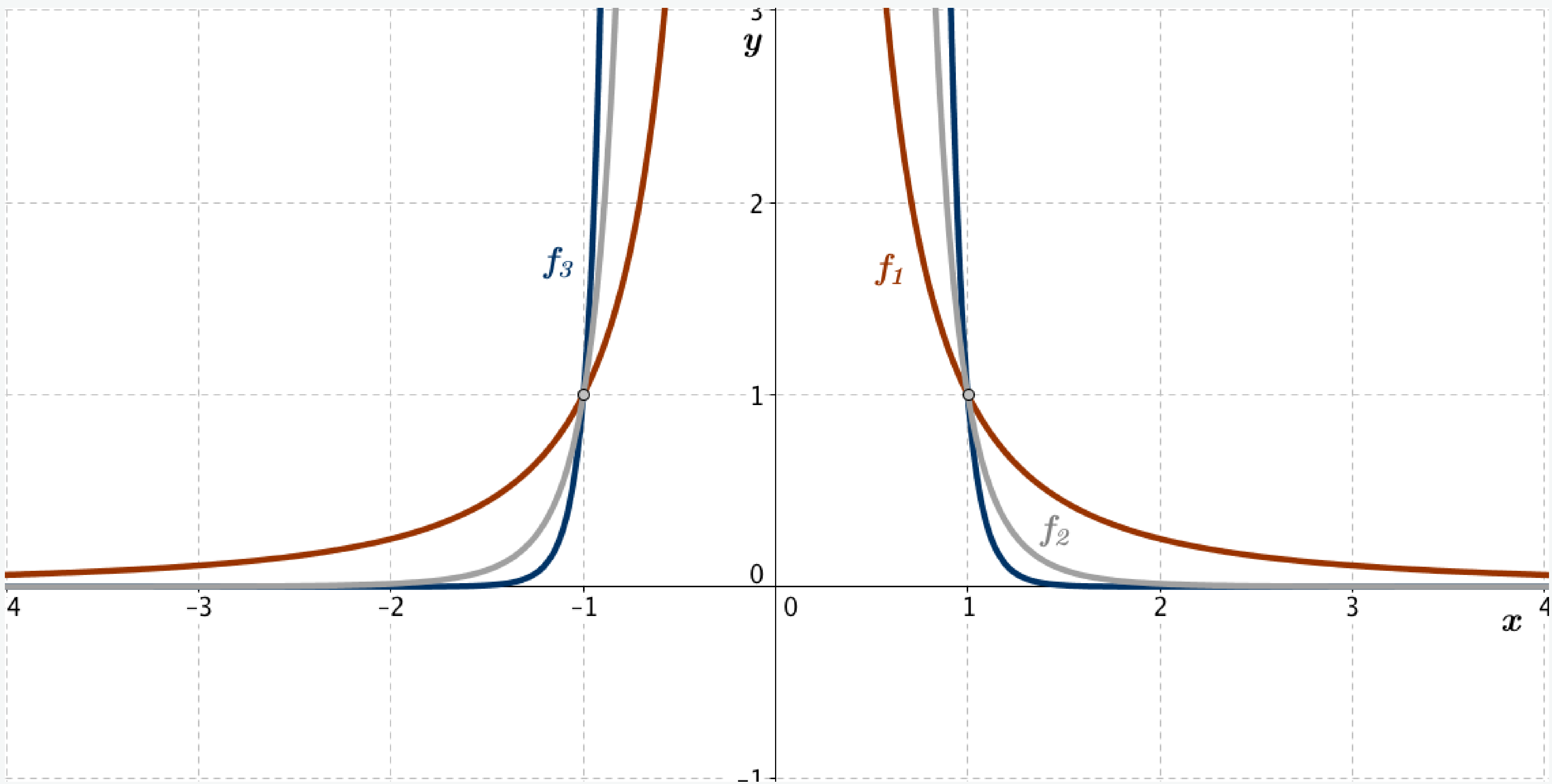


Abb. L7a: Diese gebrochenrationalen Funktionen haben eine Definitionslücke bei x = 0

$$f_1(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad f_2(x) = \frac{1}{x^6}, \qquad f_3(x) = \frac{1}{x^{12}}$$

$$D(f_i) = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \qquad W(f_i) = (0, \infty)$$

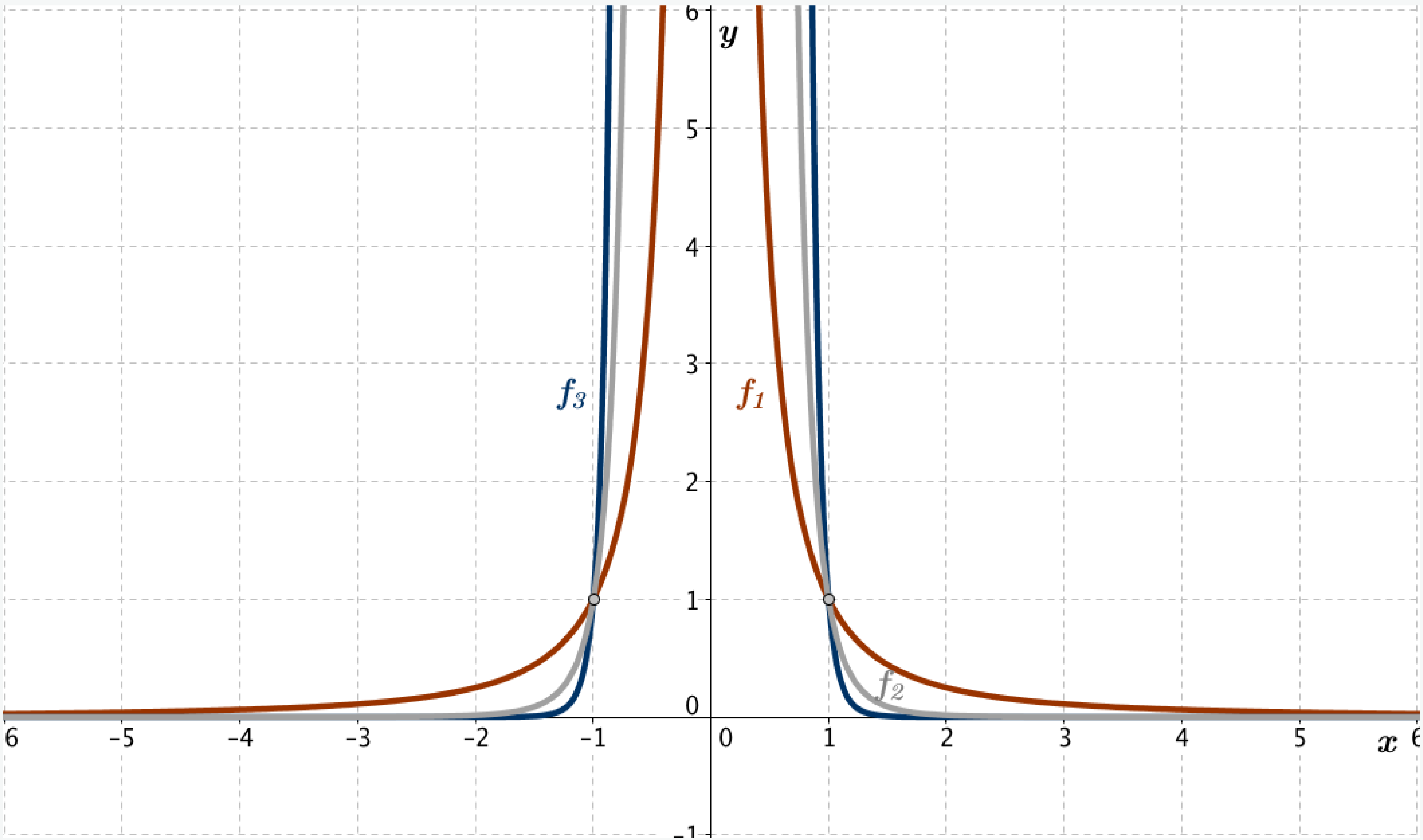


Abb. L7b: Diese gebrochenrationalen Funktionen

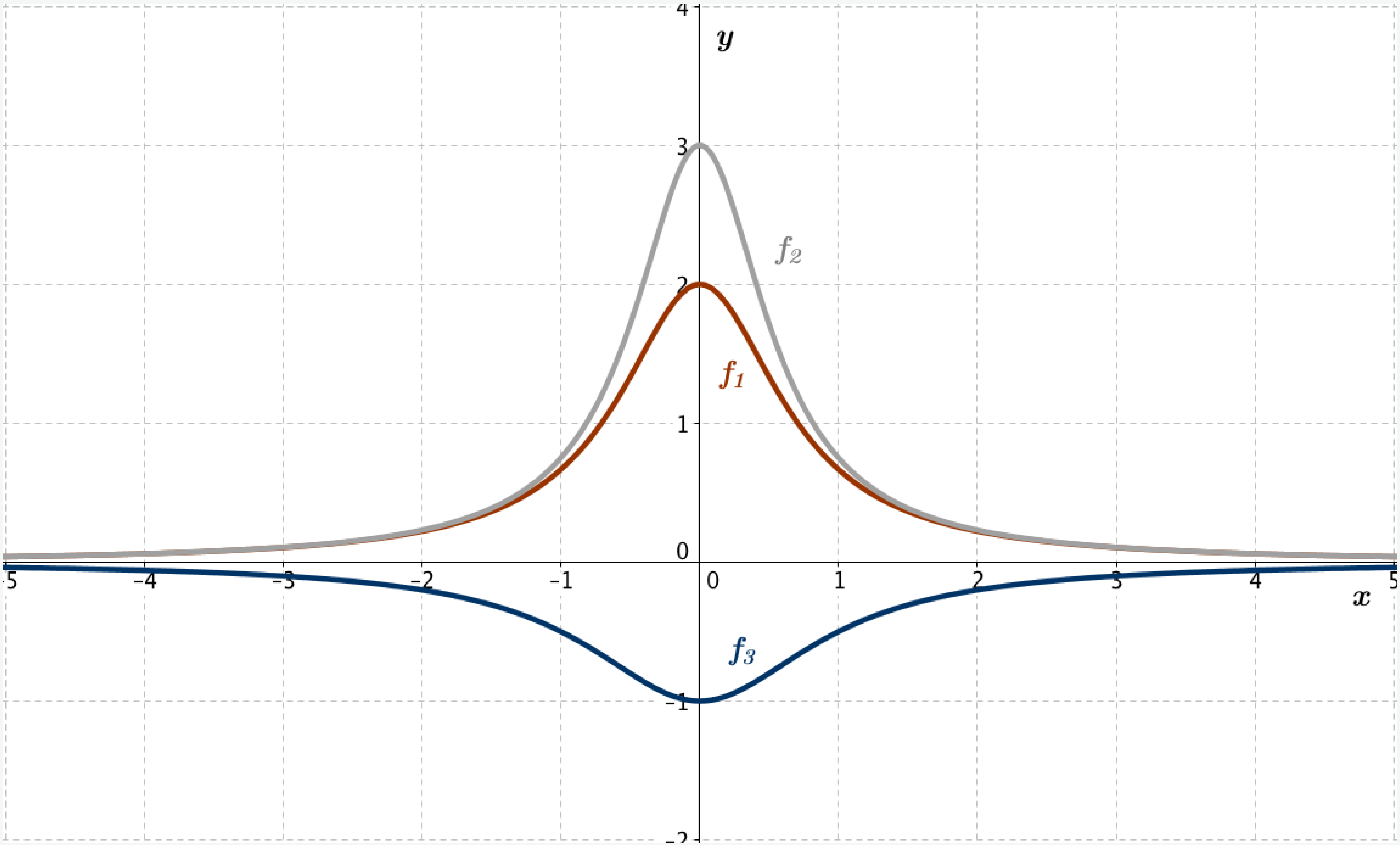


Abb. L8: Diese gebrochenrationalen Funktionen

Definitionbereich und Wertebereich: Lösung 8

$$f_1(x) = \frac{1}{x^2 + 1/2}, \qquad D(f_1) = \mathbb{R}, \qquad W(f_1) = (0,\ 2]$$

$$f_2(x) = \frac{1}{x^2 + 1/3}, \qquad D(f_2) = \mathbb{R}, \qquad W(f_2) = (0,\ 3]$$

$$f_3(x) = -\frac{1}{x^2 + 1}, \qquad D(f_3) = \mathbb{R}, \qquad W(f_3) = [-1,\ 0)$$

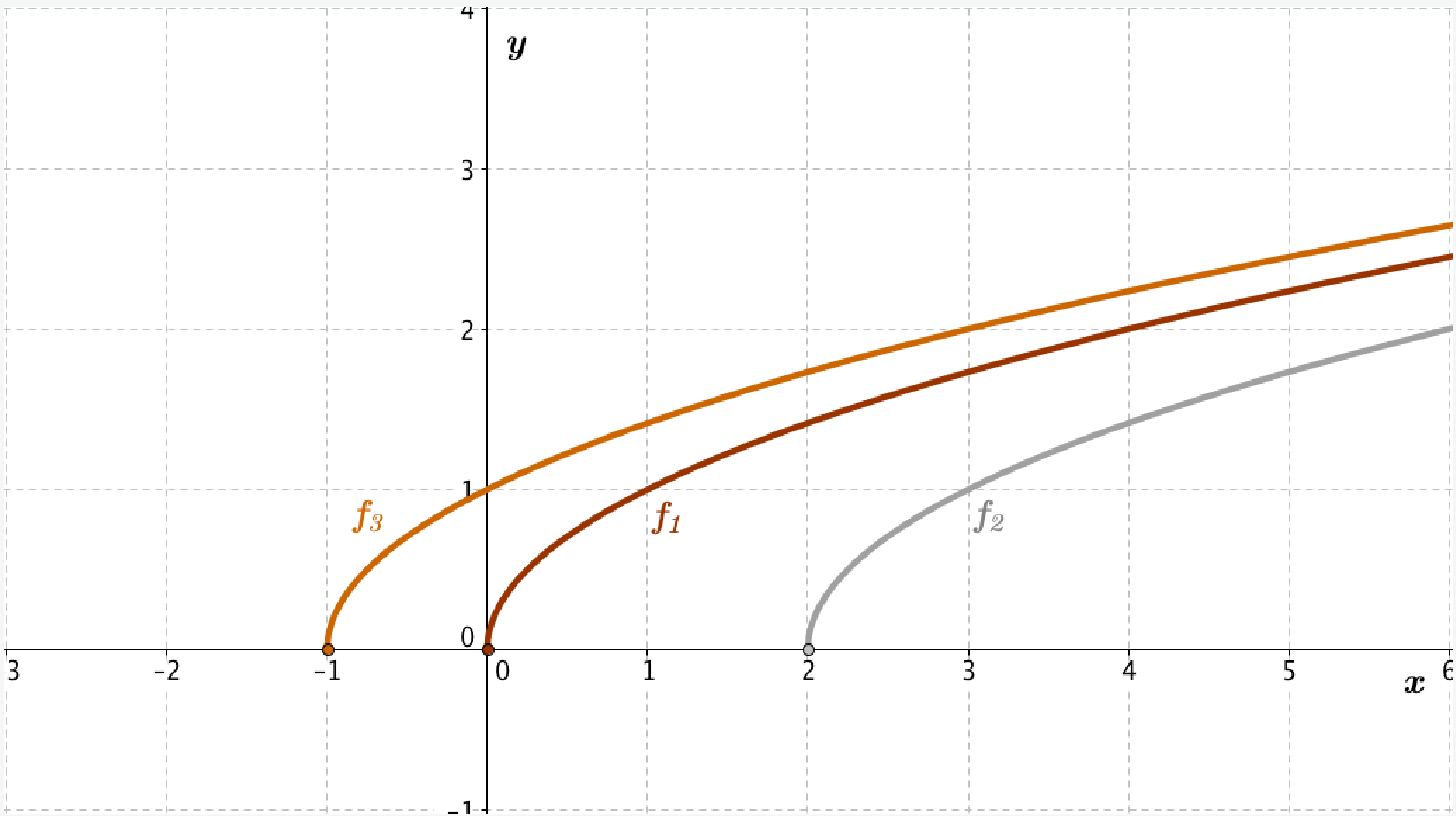


Abb. L9: Wurzelfunktionen

$$f_1(x) = \sqrt{x}\,, \qquad D(f_1) = [\,0,\ \infty\,)\,, \qquad W(f_1) = [\,0,\ \infty\,)$$

$$f_2(x) = \sqrt{x-2}\,, \qquad D(f_2) = [\,2,\ \infty\,)\,, \qquad W(f_2) = [\,0,\ \infty\,)$$

$$f_3(x) = \sqrt{x+1}\,, \qquad D(f_3) = [\,-1,\ \infty\,)\,, \qquad W(f_3) = [\,0,\ \infty\,)$$

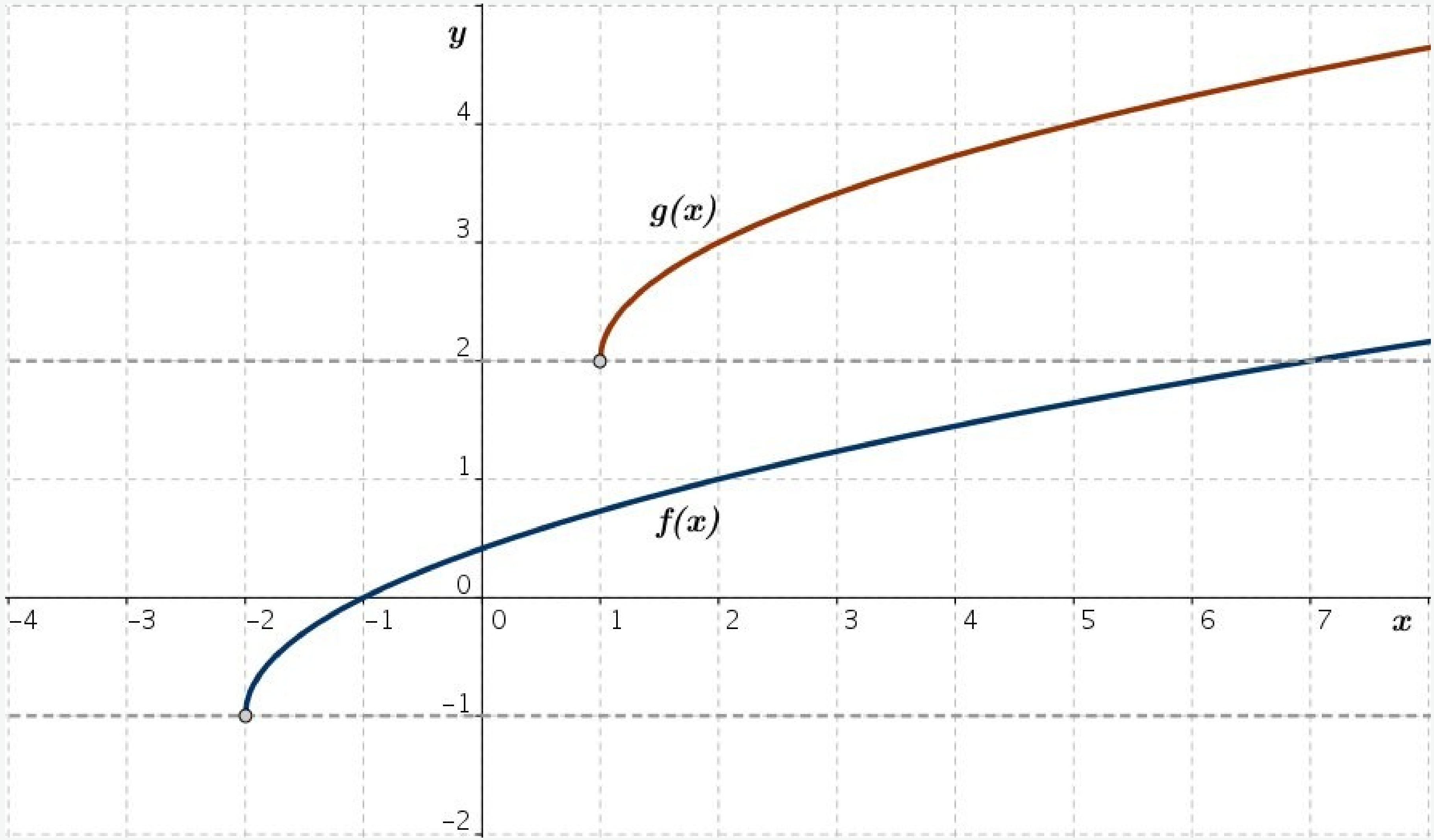


Abb. L10: Wurzelfunktionen $y = f(x)$ und $y = g(x)$

$$f(x) = \sqrt{x+2} - 1, \qquad D(f) = [-2, \infty), \qquad W(f) = [-1, \infty)$$

$$g(x) = \sqrt{x-1} + 2, \qquad D(g) = [1, \infty), \qquad W(g) = [2, \infty)$$

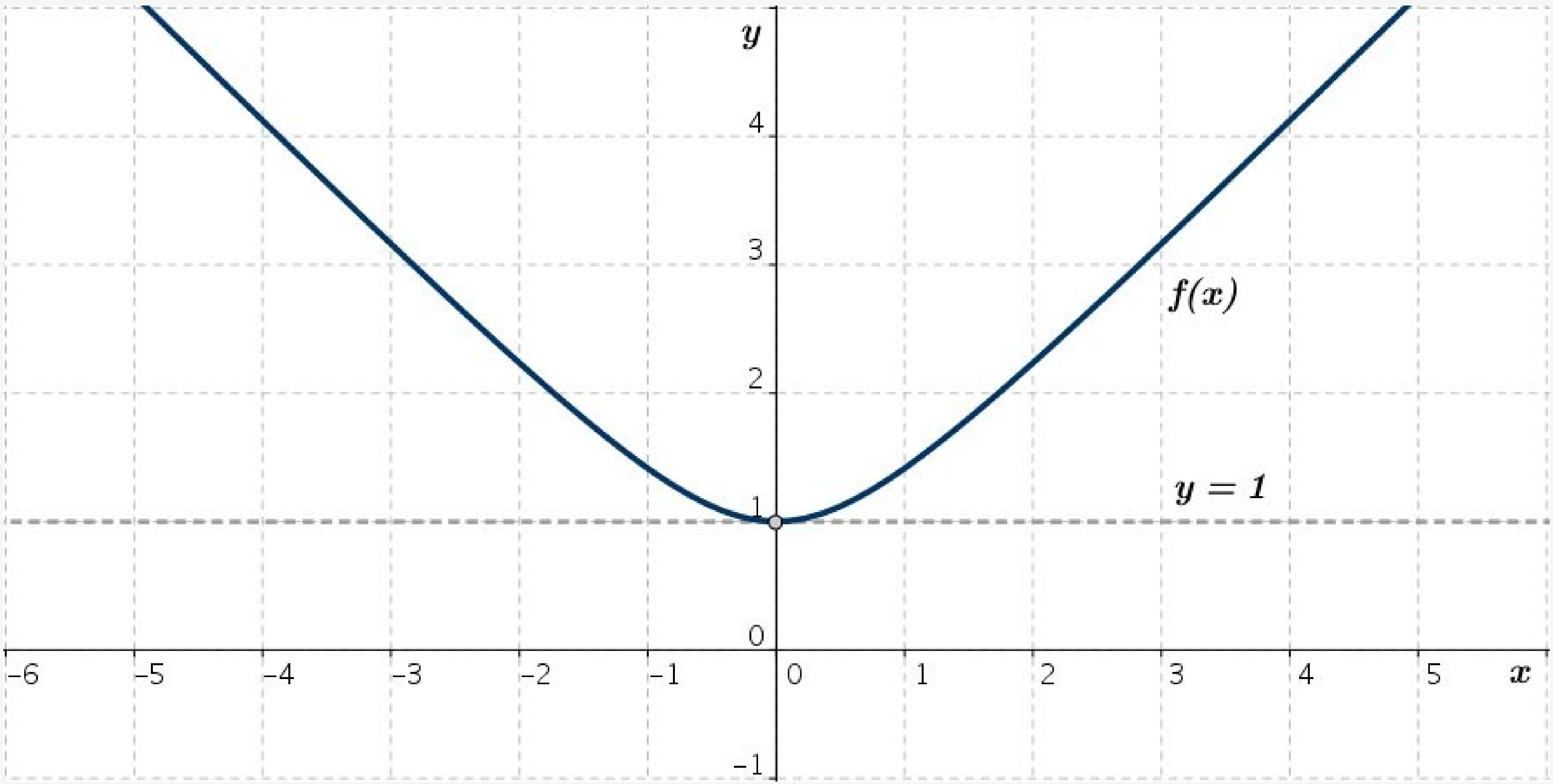


Abb. L11-a: Wurzelfunktion $y = f(x)$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}\,, \qquad D(f) = \mathbb{R}\,, \qquad W(f) = [\,1,\,\infty\,)$$

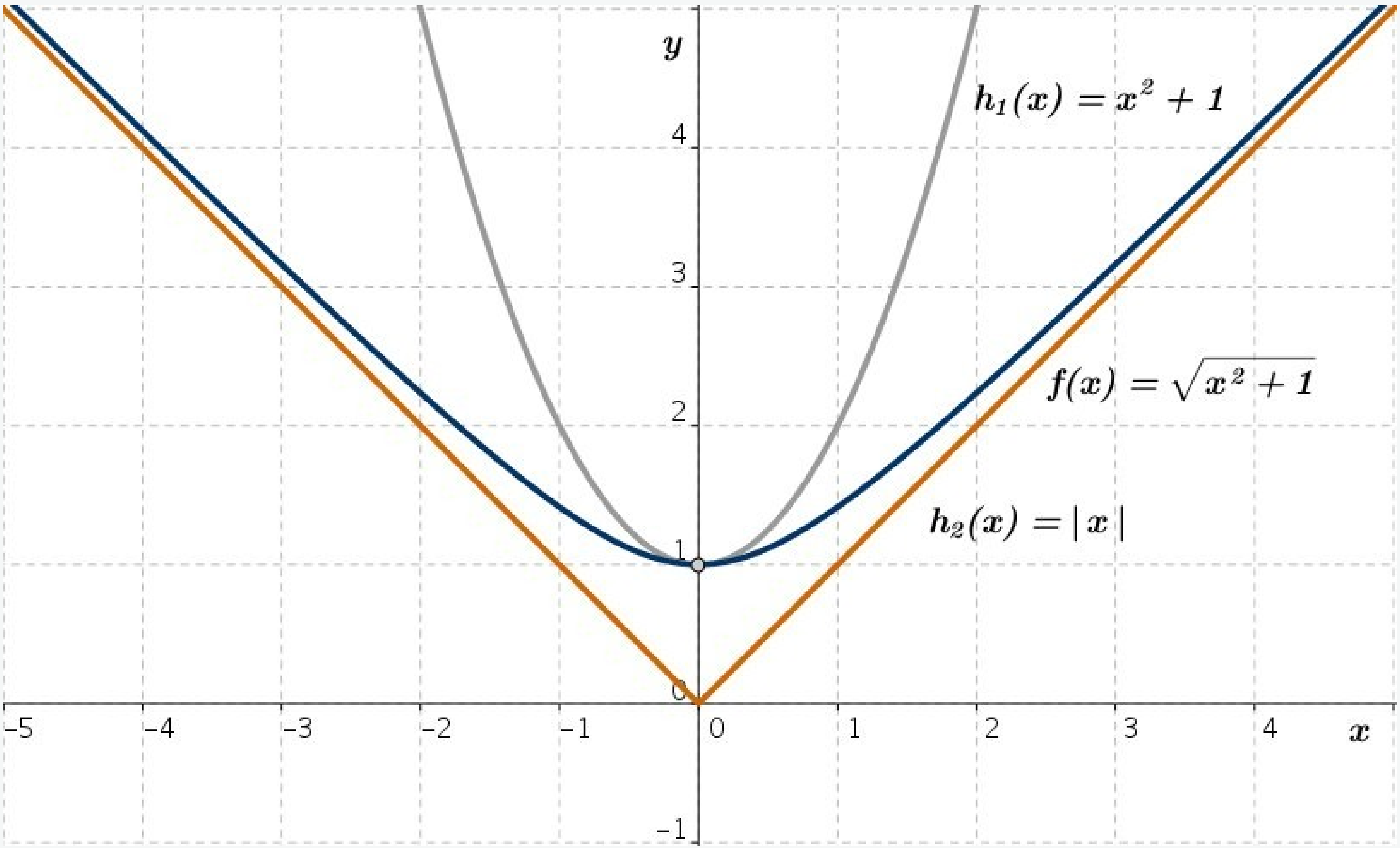


Abb. L11-b: Zum Vergleich der Wurzelfunktion $y = f(x)$ (blau) mit der quadratischen Funktion $y = x^2 + 1$ (grau) und der Betragsfunktion $y = |x|$ (rot)

$$f(x) = \sqrt{x^2+1}\,, \qquad h_1(x) = x^2 + 1, \qquad h_2(x) = |x|$$

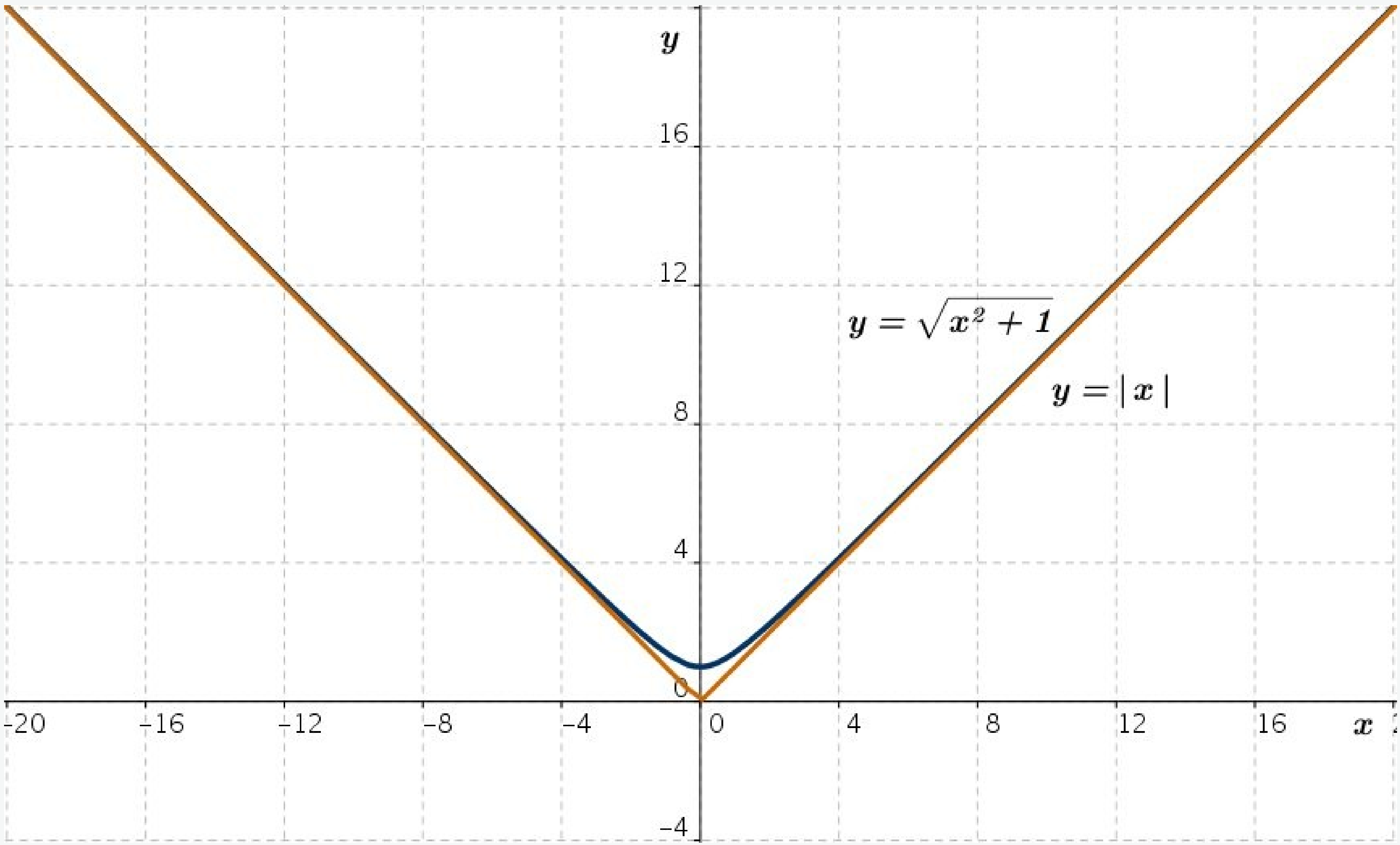


Abb. L11-c: Zum Vergleich der Wurzelfunktion $y = f(x)$ (blau) mit der Betragsfunktion $y = | x |$ (rot)

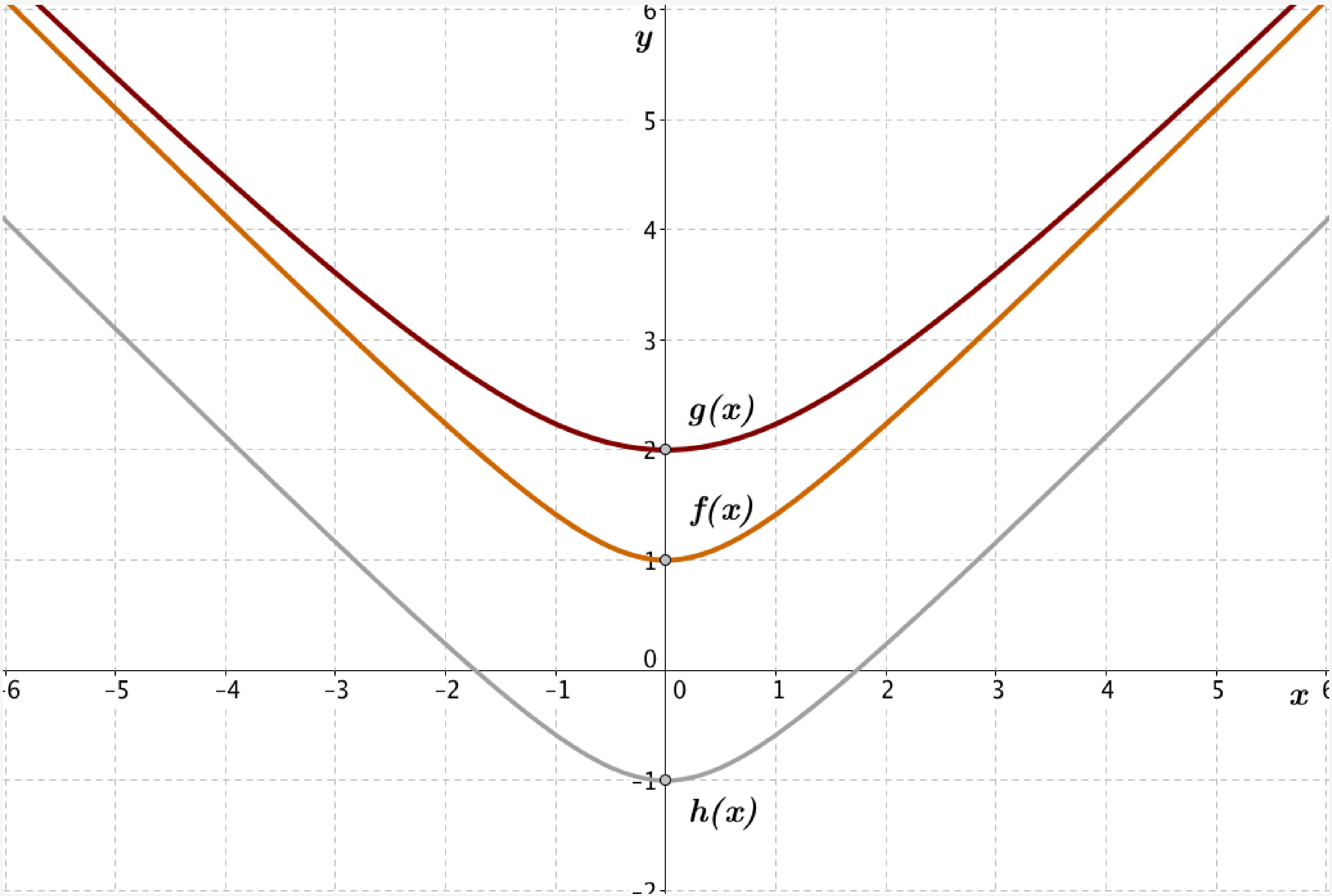


Abb. L1d: Die Wurzelfunktionen der Aufgabe

Definitionbereich und Wertebereich: Lösung 11

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}\,, \qquad D_f = \mathbb{R}\,, \qquad W_f = [\,1,\ \infty\,)$$

$$g(x) = \sqrt{x^2 + 4}\,, \qquad D_g = \mathbb{R}\,, \qquad W_g = [\,2,\ \infty\,)$$

$$h(x) = \sqrt{x^2 + 1} - 2, \qquad D_h = \mathbb{R}\,, \qquad W_h = [\,-1,\ \infty\,)$$

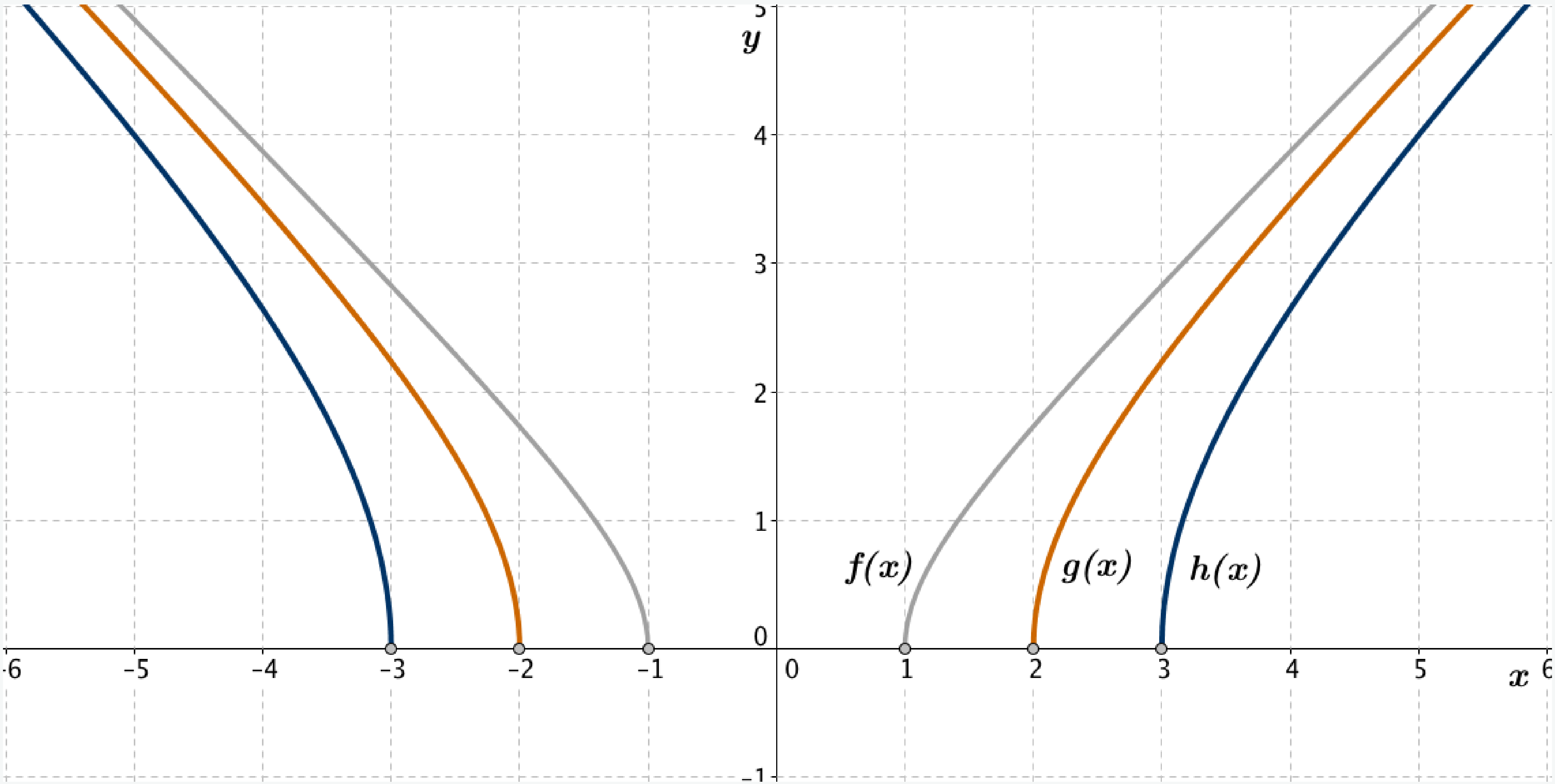


Abb. L12: Die Wurzelfunktionen der Aufgabe. Die drei Funktionen haben einen symmetrischen bezüglich der y-Achse Intervall in dem die Funktion nicht definiert ist

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}, \qquad g(x) = \sqrt{x^2 - 4}, \qquad h(x) = \sqrt{x^2 - 9}$$

Definitionbereich und Wertebereich: Lösung 12

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}\,, \qquad D_f = (-\infty, -1\,] \cup [\,1, \infty), \qquad W_f = [\,0, \infty)$$

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 4}\,, \qquad D_g = (-\infty, -2\,] \cup [\,2, \infty), \qquad W_g = [\,0, \infty)$$

$$h(x) = \sqrt{x^2 - 9}\,, \qquad D_h = (-\infty, -3\,] \cup [\,3, \infty), \qquad W_h = [\,0, \infty)$$