



<http://www.fotocommunity.de/pc/pc/cat/326/display/22602565>

*Kreis*



[http://www.fu-berlin.de/presse/publikationen/fundiert/2009\\_01/03\\_cancik-kirschbaum/mappa-mundi.jpg](http://www.fu-berlin.de/presse/publikationen/fundiert/2009_01/03_cancik-kirschbaum/mappa-mundi.jpg)

Die Keilschrift-Tontafel der babylonischen Sicht auf die Welt.  
Die bewohnte Erde wird als Kreis umgeben von Meer dargestellt.

# Kreisgleichung

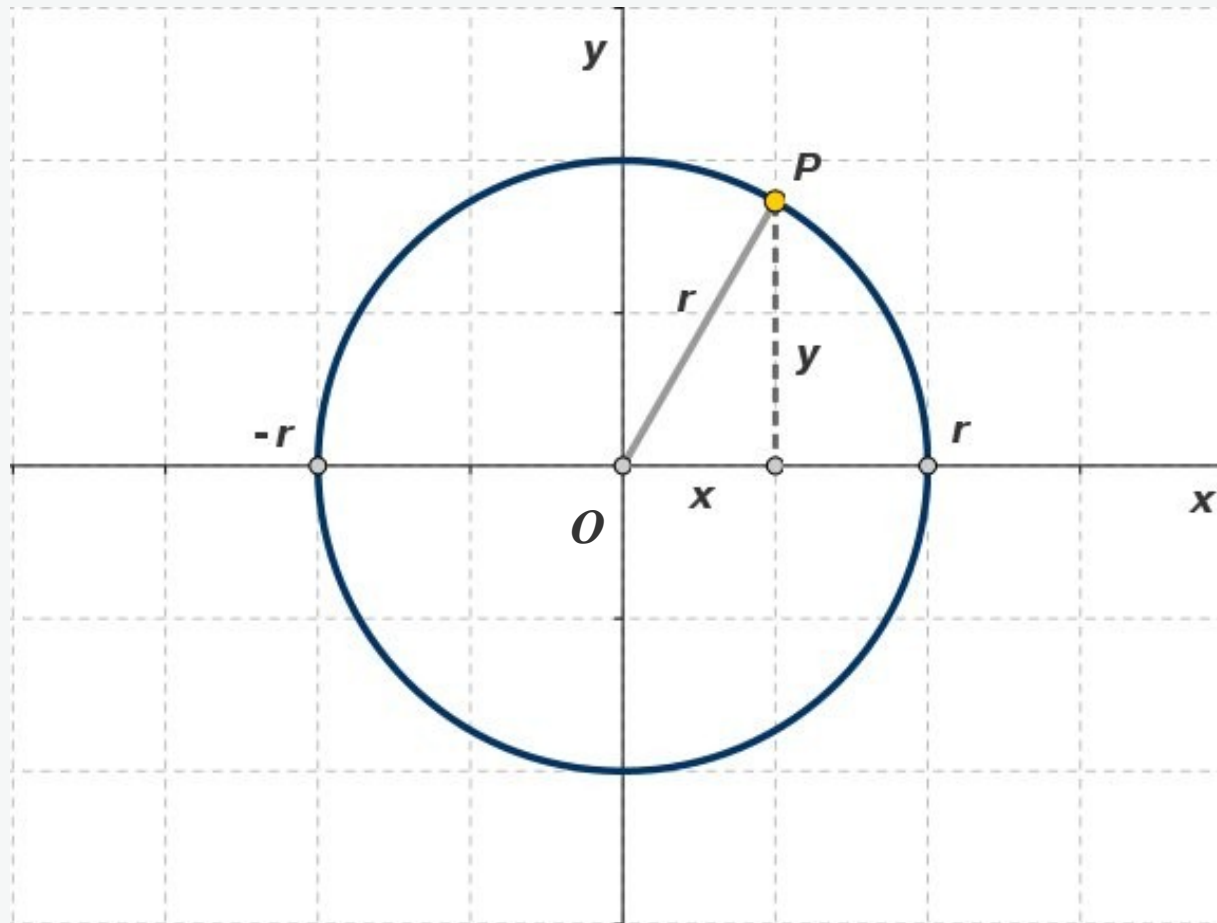


Abb. 1: Der Kreis mit Mittelpunkt  $O$  und Radius  $r$  im kartesischen Koordinatensystem

Ist  $k$  ein Kreis mit Mittelpunkt  $O$  und Radius  $r$ , so gilt für jeden Punkt  $P(x, y)$  des Kreises nach dem Satz von Pythagoras die Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Die allgemeine Gleichung eines Kreises mit Mittelpunkt  $M$  und Radius  $r$  kann ebenfalls mit dem Satz von Pythagoras hergeleitet werden

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2, \quad M = (x_M, y_M)$$

$$r = \sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2}$$

Graphische Darstellung folgt.

# Kreis

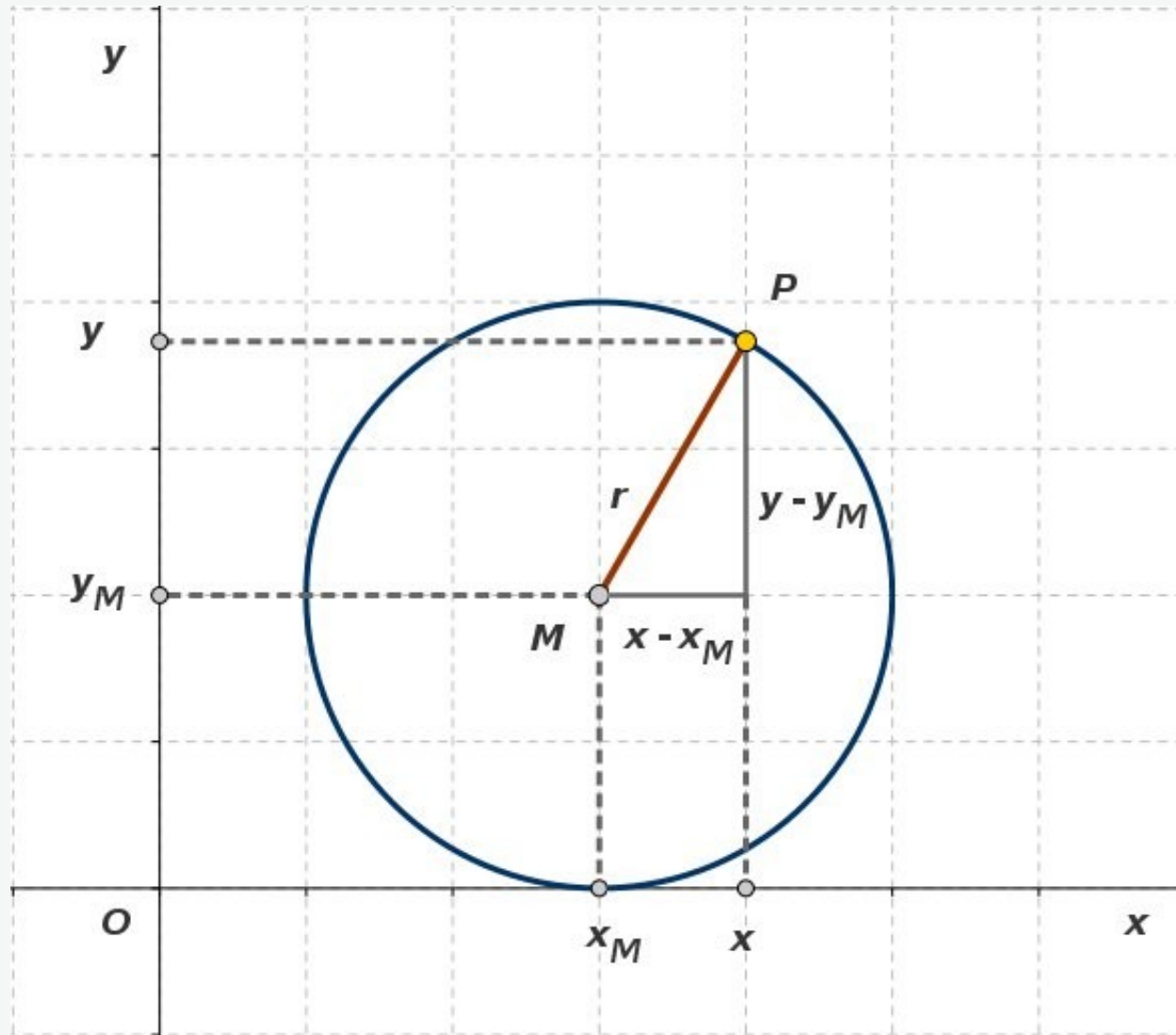


Abb. 2: Der Kreis mit Mittelpunkt  $M$  und Radius  $r$

## Kreisgleichung: Beispiel

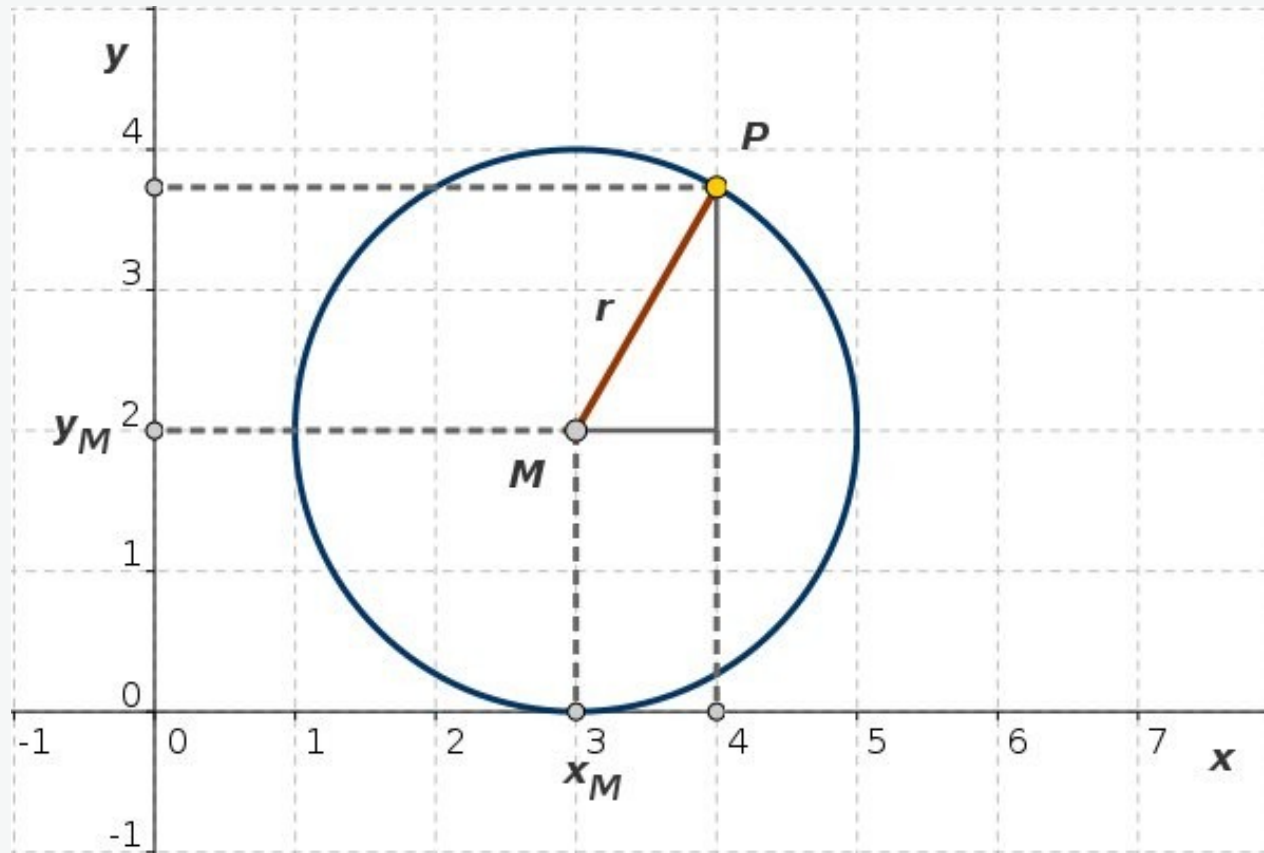


Abb. 3: Kreis mit Mittelpunkt  $M(3, 2)$  und Radius  $r = 2$

Die Gleichung eines Kreises mit Mittelpunkt  $M(3, 2)$  und Radius 2 lautet

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4, \quad M = (3, 2)$$

oder

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$$

## Kreisgleichung

Man erkennt nicht sofort, dass die Gleichung

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$$

einen Kreis beschreibt. Um das entscheiden zu können, benutzt man das bekannte Verfahren der quadratischen Ergänzung

$$x^2 - 6x + y^2 - 4y + 9 = 0$$

$$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2 \Leftrightarrow x^2 - 2ax = (x - a)^2 - a^2$$

Um die Unbekannte  $a$  zu bestimmen, vergleicht man in

$$x^2 - 6x, \quad x^2 - 2ax = (x - a)^2 - a^2$$

die Terme  $-6x$ ,  $-2ax$ , d.h. man löst die Gleichung

$$-6x = -2xa \Rightarrow a = 3$$

Um die Unbekante  $b$  zu bestimmen, vergleicht man

$$y^2 - 4y, \quad y^2 - 2by = (y - b)^2 - b^2$$

die Terme  $-4y$ ,  $-2by$ , d.h. löst die Gleichung

$$-4y = -2by \Rightarrow b = 2$$



## Kreis als eine Relation

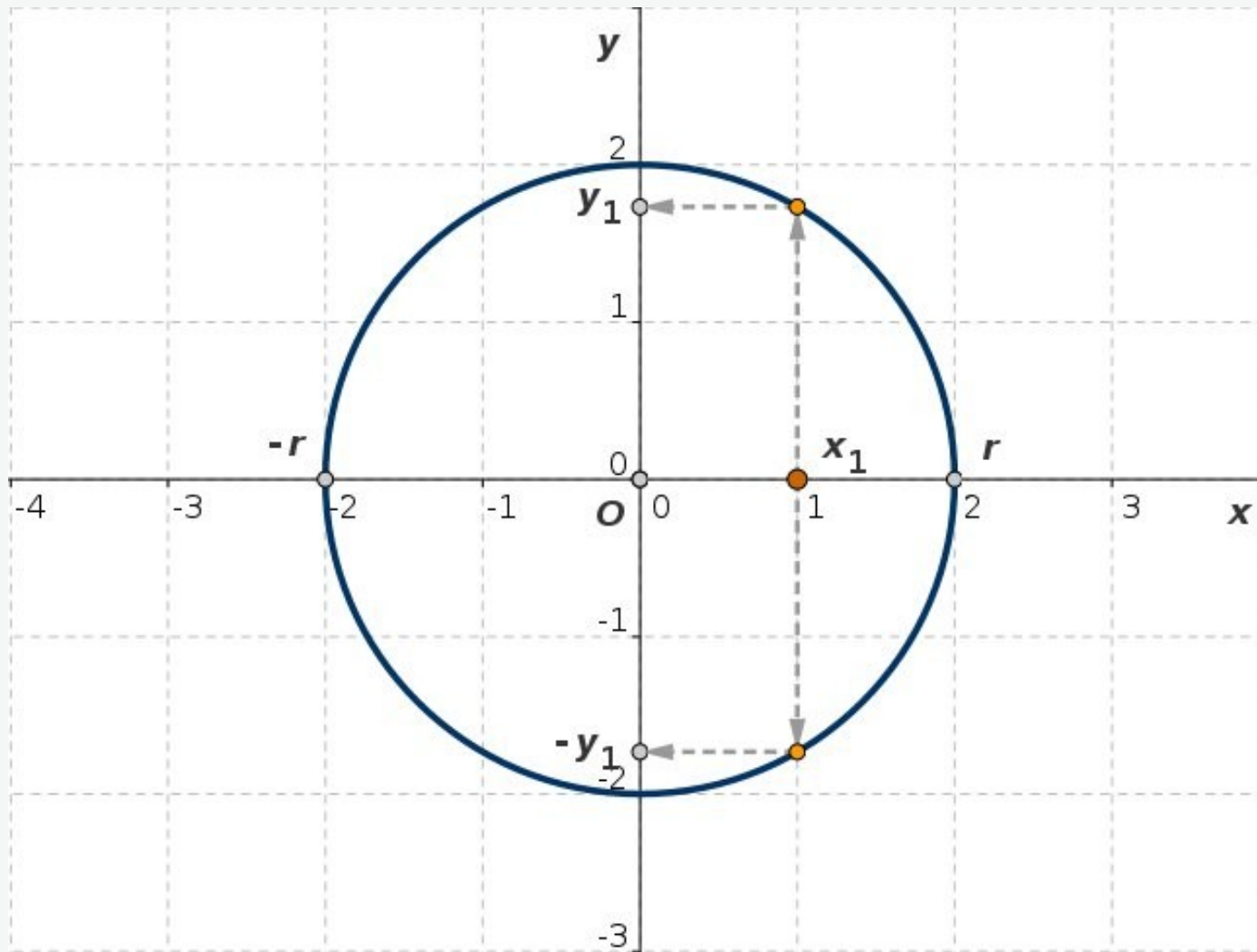


Abb. 4-1: Kreis mit Mittelpunkt  $O(0, 0)$  und Radius  $r = 2$

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad D = [-r, r], \quad W = [-r, r]$$

Die Gleichung des Kreises entspricht einer Relation, weil jedem  $x$  aus  $D$  mit Ausnahme von  $x = r$  und  $x = -r$  zwei  $y$ -Werte entsprechen.

# Kreis als eine Funktion

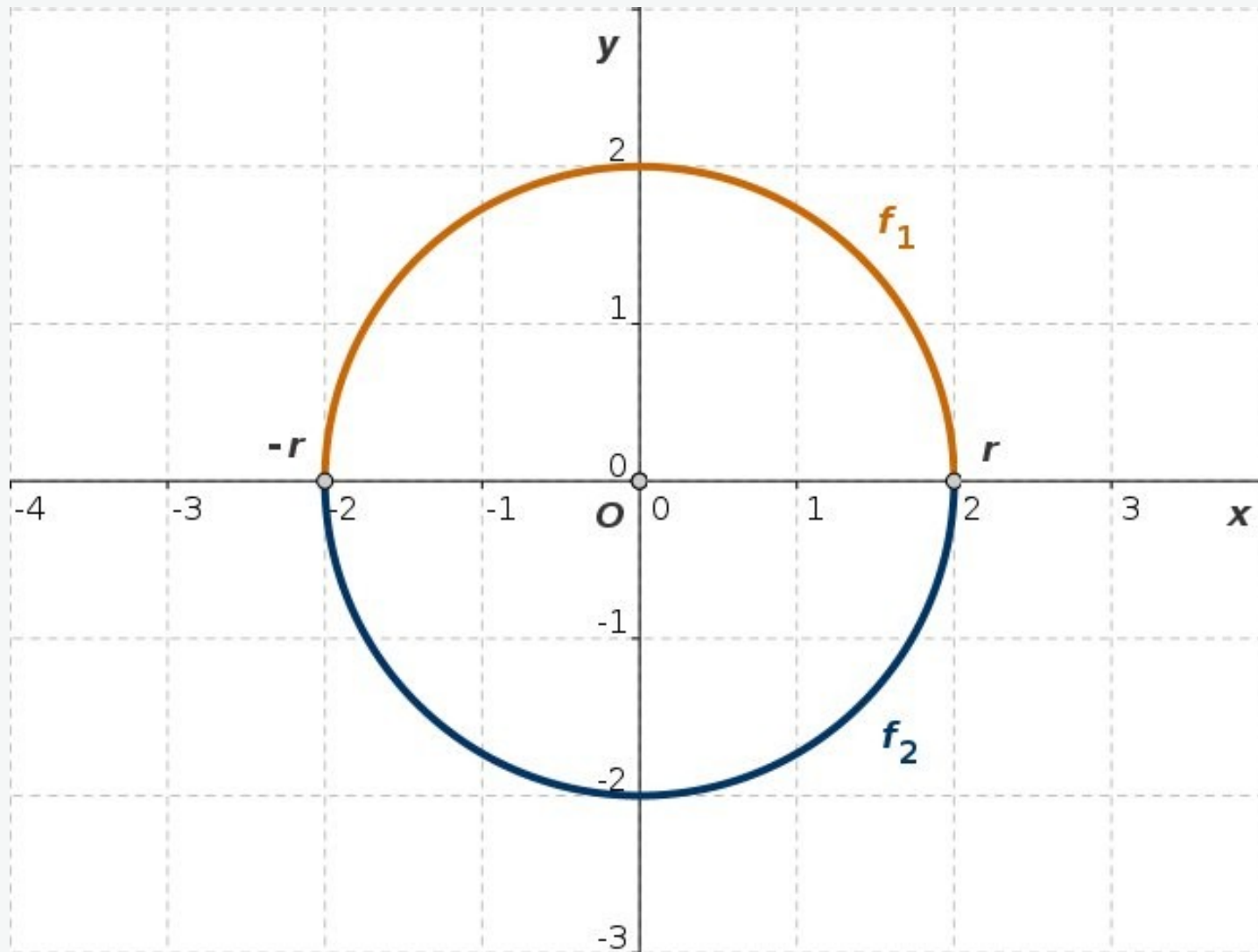


Abb. 4-2: Kreis mit Mittelpunkt  $O(0, 0)$  und Radius  $r = 2$

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad y^2 = r^2 - x^2, \quad y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$$

# Kreis als eine Funktion

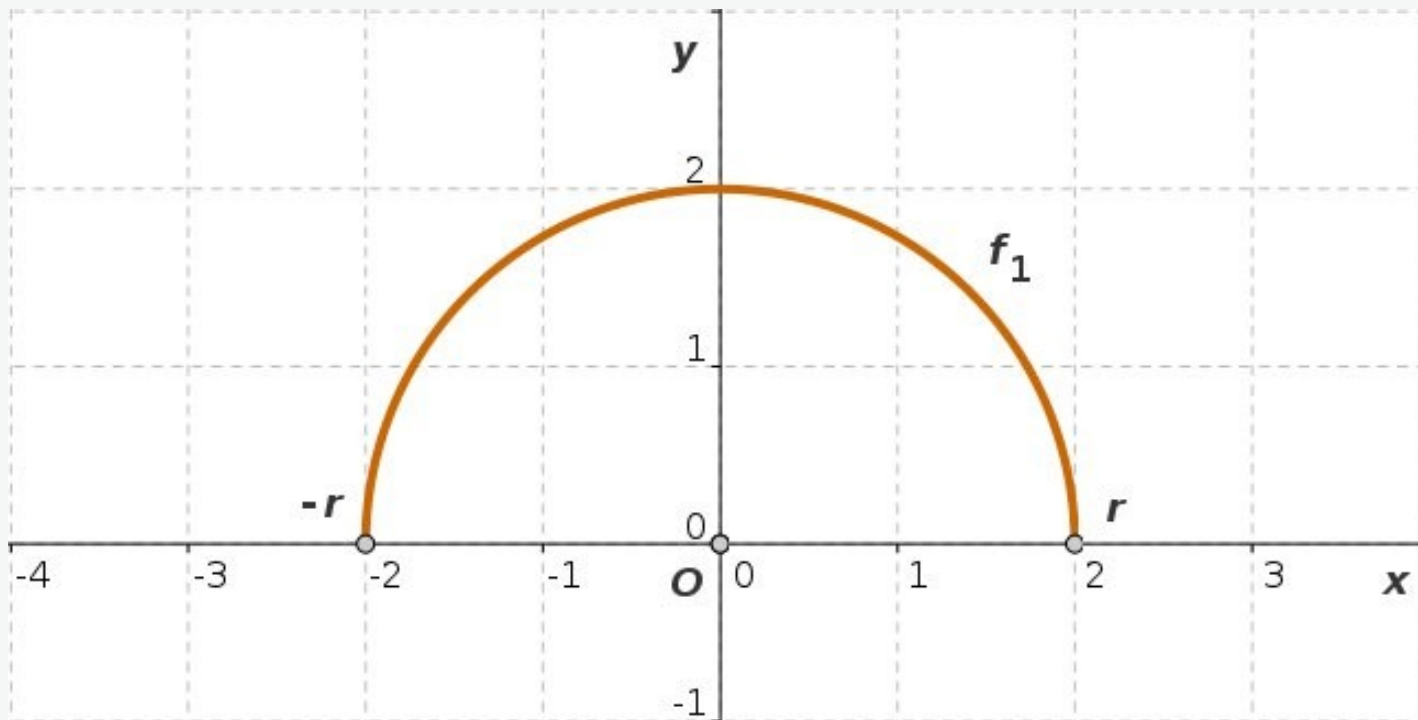


Abb. 4-3: Halbkreis mit Mittelpunkt  $O(0, 0)$  und Radius  $r = 2$

$$f_1(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad D(f_1) = [-r, r], \quad W(f_1) = [0, r]$$

# Kreis als eine Funktion

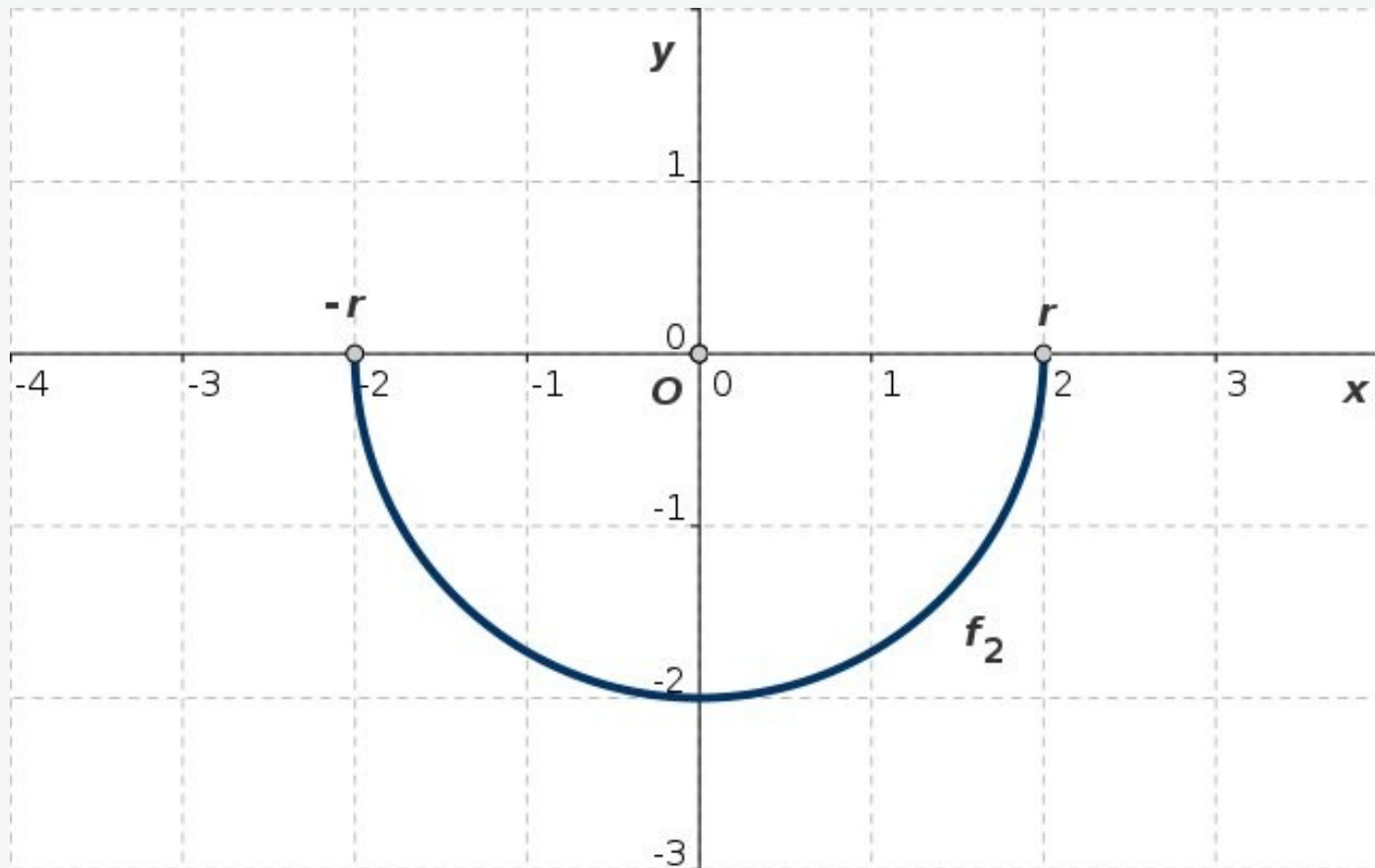


Abb. 4-4: Halbkreis mit Mittelpunkt  $O(0, 0)$  und Radius  $r = 2$

$$f_2(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}, \quad D(f_2) = [-r, r], \quad W(f_2) = [-r, 0]$$