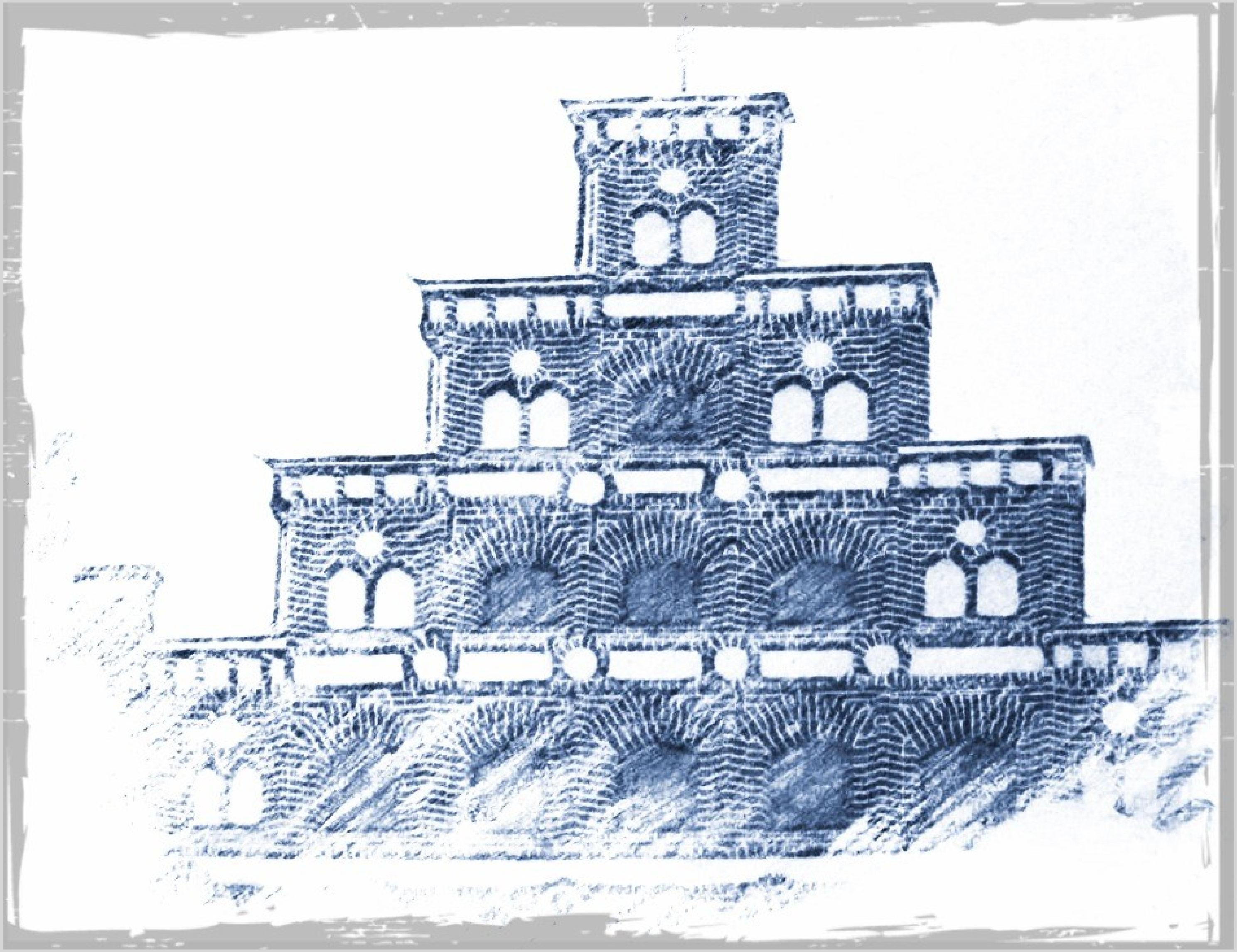
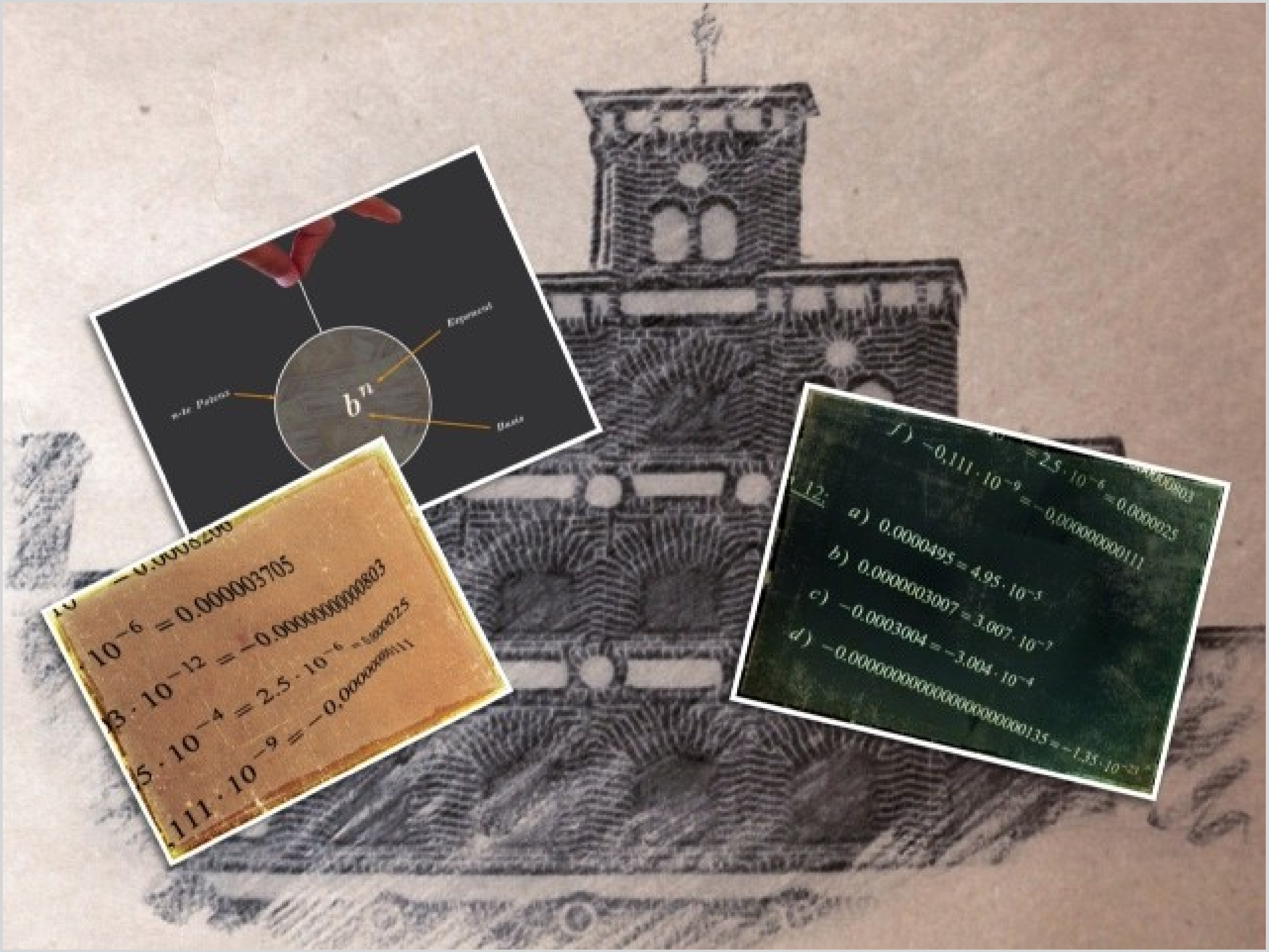


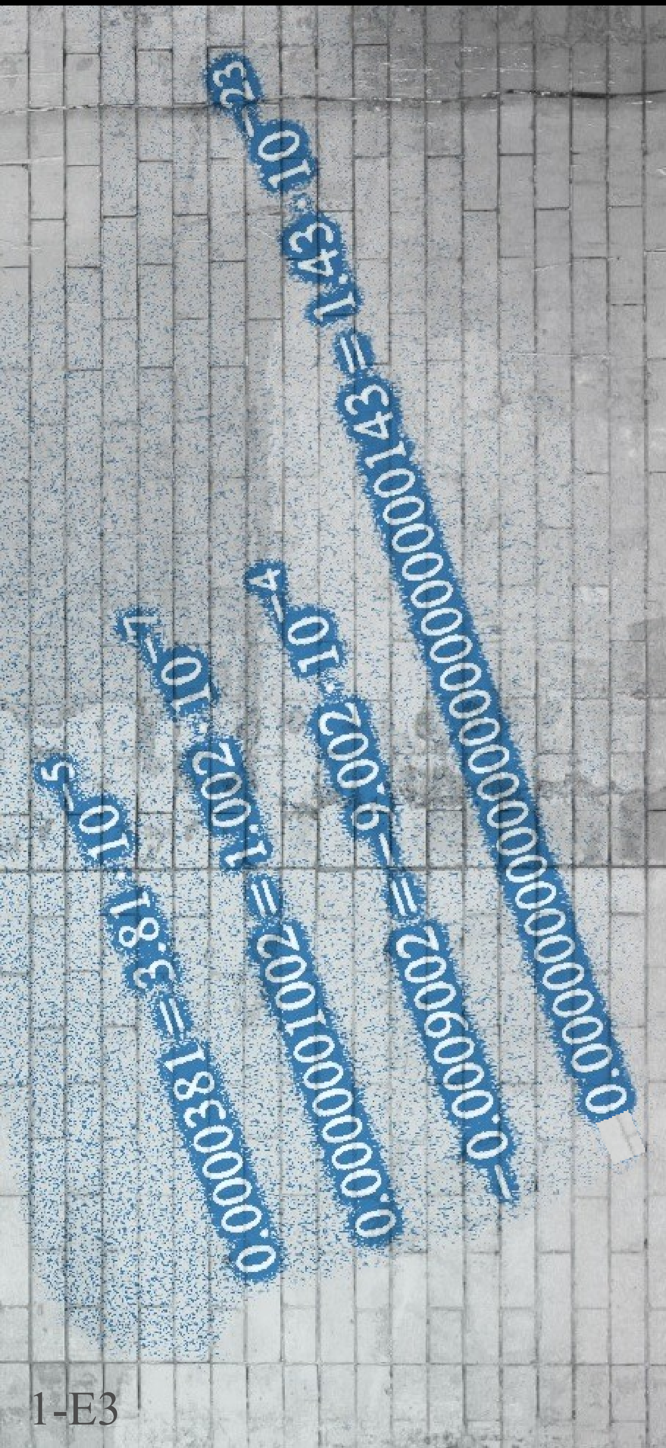
Lüneburg, Fragment

Potenzen mit ganzzahligen Exponenten



b^n
Exponent
Basis
12:
a) 0.0000495 = 4.95 · 10^-5
b) 0.0000003007 = 3.007 · 10^-7
c) −0.0003004 = −3.004 · 10^-4

Was sollen wir kennen?



- die Eigenschaften von Exponenten,
- die Wissenschaftliche Notation der reellen Zahlen,
- die Potenzenregeln.

Reelle Zahlen und algebraische Ausdrücke werden oft mit Exponenten geschrieben. In diesem Teil wird gezeigt:

- wie man physikalische Größen wie zum Beispiel die Massse der Erde

$$M_{Erde} \simeq 6\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000 \ \text{kg}$$

oder die Elektronenmasse

$$m_e \simeq 0.0000000000000000000000000000009 \ \text{kg} \,,$$

in kompakter Form schreiben kann , d.h. in der Form:

$$a \cdot 10^m, \qquad 1 < |\, a \,| < 10,$$

wobei m eine ganze Zahl ist.

- welche Regeln man anwenden kann, um mit solchen Zahlen zu rechnen.

Mathematik kann sehr kompliziert sein, aber sie hält immer Instrumente bereit, um komplizierte Ausdrücke zu vereinfachen. Eines dieser Instrumente ist die Potenzschreibweise. Denn eine Potenz ist nichts anderes als eine Kurzschreibweise für eine bestimmte Multiplikation.

Zum Beispiel kann eine wiederholte Multiplikation in Exponentialform geschrieben werden.

Wiederholte Multiplikation:	*Exponentialform:*
$b \cdot b \cdot b \cdot b$	b^4
$(5x) \cdot (5x) \cdot (5x)$	$(5x)^3$
$(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$	$(-3)^5$
$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$	$\left(\frac{1}{6}\right)^2$

Definition:

Das Produkt von n gleichen Faktoren b heißt n-te Potenz von a

$$b^n = \underbrace{b \cdot b \cdot b \dots b}_{n \text{ Mal}}, \qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad b \in \mathbb{R}$$

b heißt Basis, n heißt Exponent.

Den Rechenvorgang, eine Basis b in eine Potenz zu erheben, nennt man Potenzieren. Beim Potenzieren besteht die Aufgabe darin, aus einer gegebenen Basis b und einem gegebenen Exponenten n den Potenzwert

$$p = b^n$$

zu berechnen.

Beispiele:

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2, \qquad 5^6 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5, \qquad \left(\frac{1}{7}\right)^4 = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7}$$

$$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000, \qquad 10^5 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100\,000$$

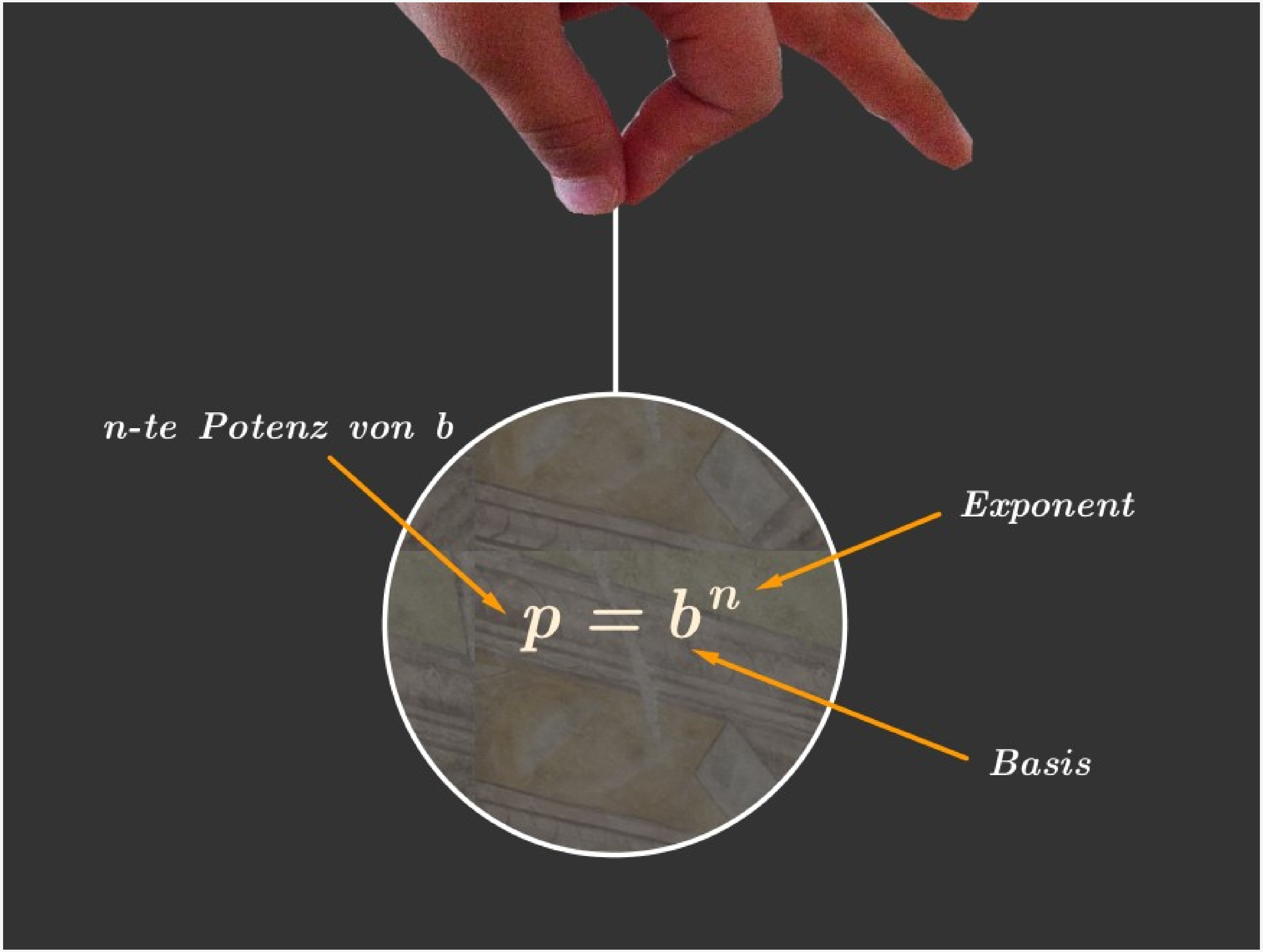


Abb. 1-1: Illustration zur n-ten Potenz

"Potenzen von 10" sind sehr praktisch, um große und kleine Zahlen aufzuschreiben und mit ihnen weiterzurechnen. Anstelle von Zahlen mit vielen Nullen, wie zum Beipiel 190.000, schreiben wir

$$190\,000 = 1.9 \cdot 100\,000 = 1.9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1.9 \cdot 10^{5}.$$

Die Darstellung der Zahl 190 000 als Produkt von 1.9 und der fünften Potenz von 10 nennt man wissenschaftliche Notation oder wissenschaftliche Schreibweise der Zahl 190 000.

In wissenschaftlicher Notation hat eine Zahl die Form

$$a \cdot 10^{m}, \qquad 1 < |a| < 10, \qquad m \in \mathbb{Z}.$$

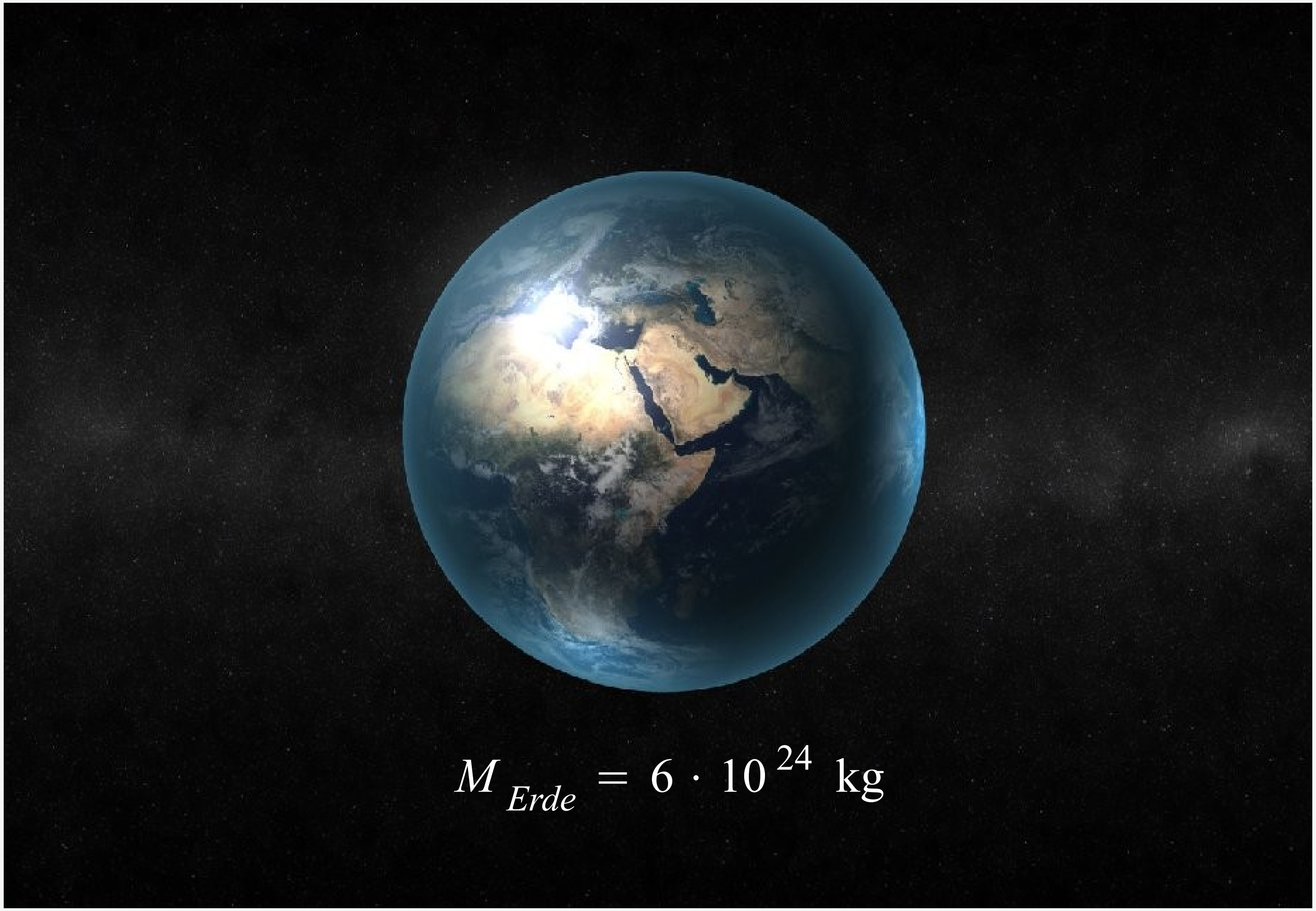


Abb. 1-2: Die Erde (http://wallpis.com/wp-content/uploads/2013/07/HD-Planet-Earth-Wallpapers.jpg)

Die Masse der Erde ist:

$$M_{Erde} \simeq 6\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000 =$$

$$= 6 \cdot \underbrace{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \ \ldots \ \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10}_{24 \ \text{mal}} = 6 \cdot 10^{24} \ \text{kg}$$

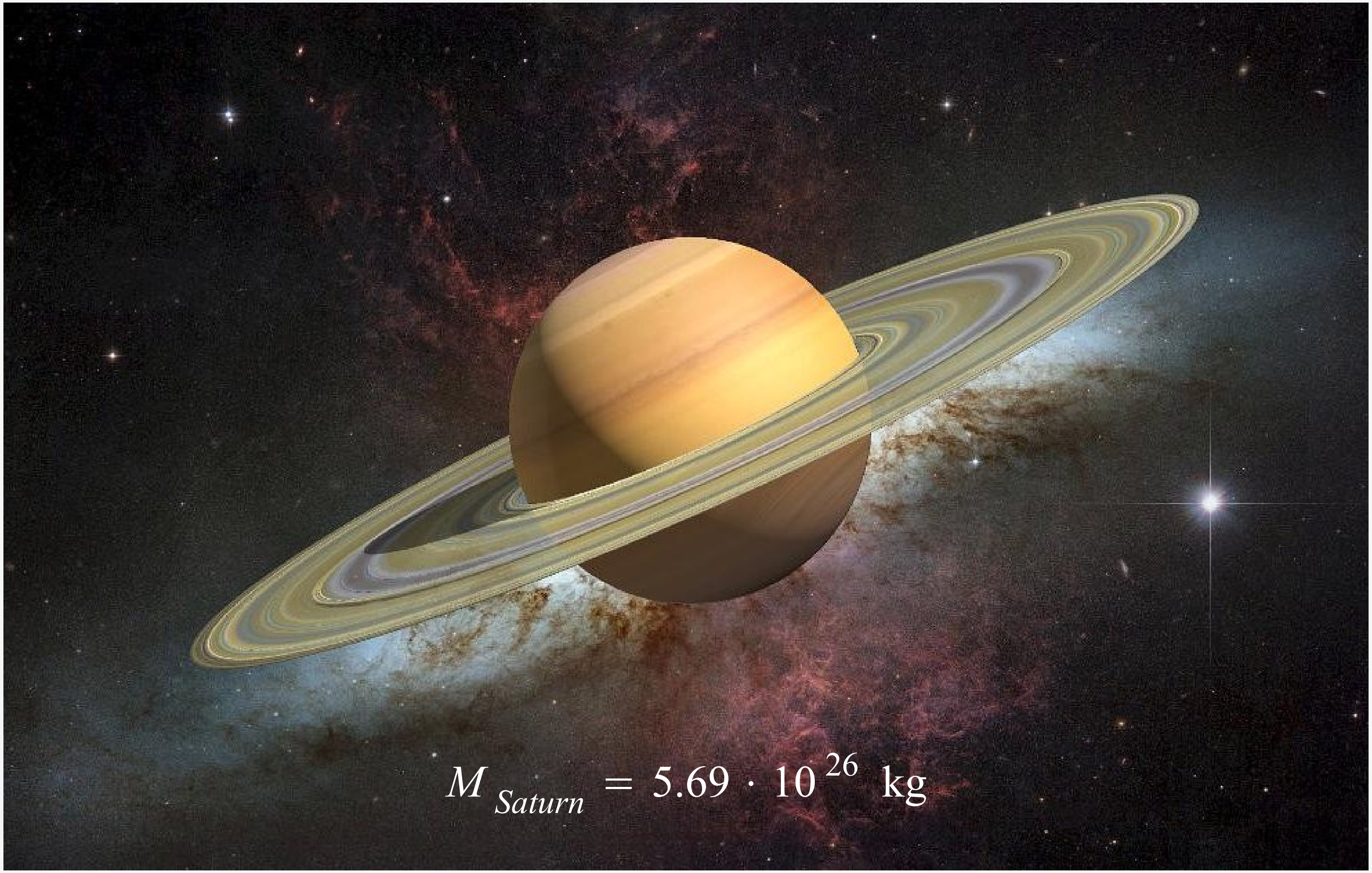


Abb. 1-3: Der Saturn (*http://www.verlag.digi-art.de/Archiv/album/Kosmos/slides/Saturn.jpg*)

Die Masse des Saturn, des zweitgrößten Planeten des Sonnensystems, ist mehr als 95 mal so groß als die der Erde:

$$M_{Saturn} \simeq 569\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000 =$$

$$= 5.69 \cdot 10^{26} \text{ kg} \simeq 95.15 \ M_{Erde}$$

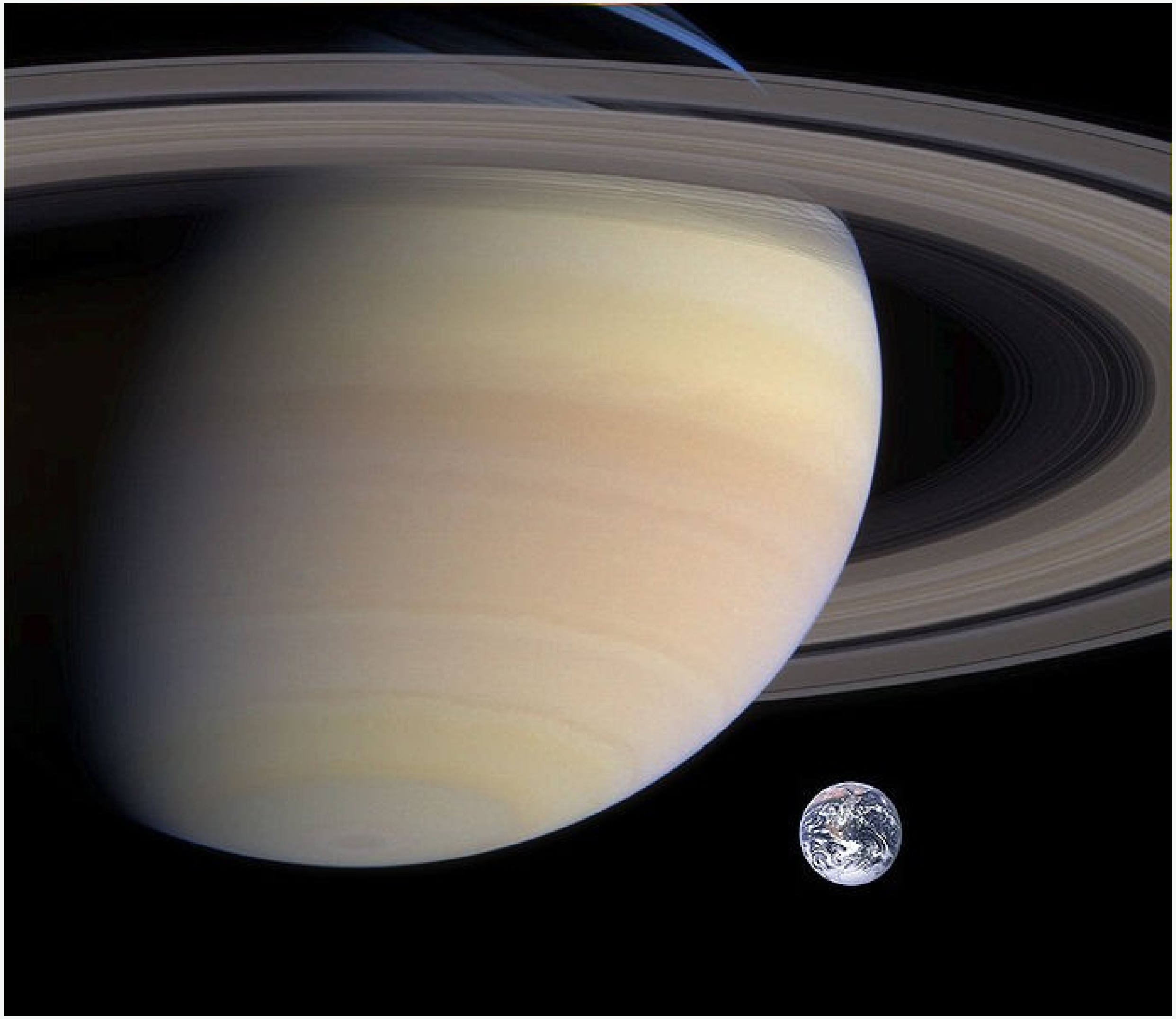


Abb. 1-4: Saturn und Erde (http://en.wikipedia.org/wiki/Saturn)

Die Distanz zwischen Erde und Saturn:

$$d \simeq 1.43 \text{ Milliarden km } = 1\,430\,000\,000 \text{ km} = 1.43 \cdot 10^9 \text{ km}$$

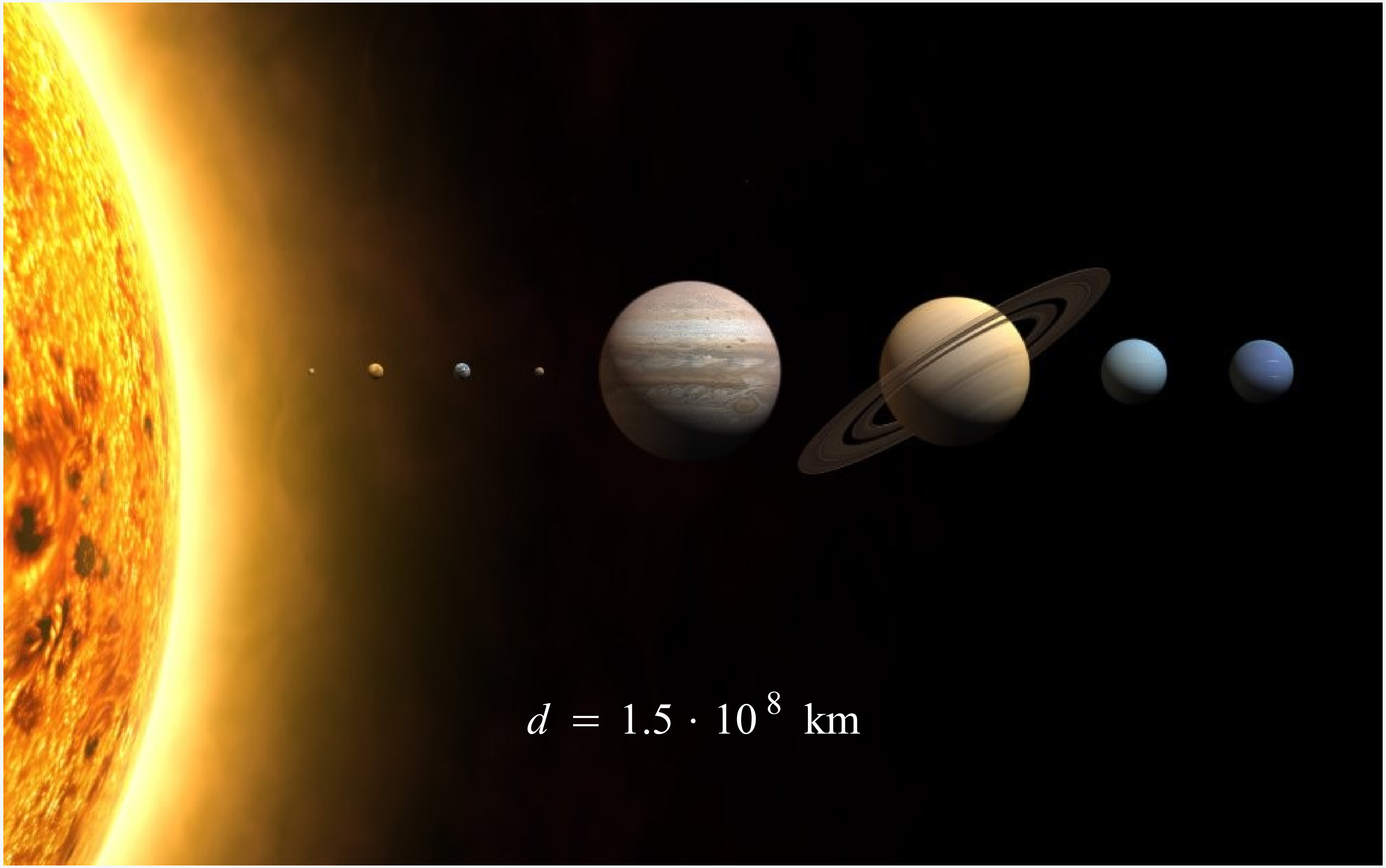


Abb. 1-5: Das Sonnensystem (http://wallpaperscrunch.com/wallpapers/1/solar-system-wide.jpg)

Die durchschnittliche Entfernung d von der Erde zur Sonne beträgt ungefähr 150 Millionen Kilometer:

$$d \simeq 150 \text{ Millionen km} = 150\,000\,000 \text{ km} = 1.5 \cdot 10^{8} \text{ km}$$

Aufgabe 1: Schreiben Sie folgende Zahlen in wissenschaftlicher Notation:

a) 271 900 000, b) 143 000 000 000

c) 10 100 000 000, d) 8 300 004 000 000

Aufgabe 2: Ein Jahr hat 8765.81 Stunden oder 525949 Minuten. Schreiben Sie diese Zahlen in wissenschaftlicher Notation.

Aufgabe 3: Ein asiatischer Elephant in Hagenbecks Tierpark in Hamburg wiegt 54000 kg. Schreiben Sie diese Zahlen in wissenschaftlicher Notation.

Aufgabe 4: Ein Blauwal wiegt 170 Tonen und ist 27 Meter lang. Schreiben Sie das Gewicht in kg und die Länge in cm in wissenschaftlicher Notation.

Aufgabe 5: Schreiben Sie die Sonnenmasse in wissenschaftlicher Notation:

$$M_{Sonne} = 1\ 988\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ kg$$

Aufgabe 6: Ein Lichtjahr, etwa 9,5 Billionen Kilometer ist die Strecke, die eine elektromagnetische Welle wie das Licht in einem Jahr im Vakuum zurücklegt. Schreiben Sie diese Strecke in wissenschaftlicher Notation.

Aufgabe 7: Spinosaurus ist ein Dinosaurier, der vor etwa 94 bis 113 Millionen Jahren lebte. Schreiben Sie diese Zeitspanne in wissenschaftlicher Notation.

Lösung 1:

$a)\ 271\,900\,000 = 2.719 \cdot 10^{8}$

$b)\ 143\,000\,000\,000 = 1.43 \cdot 10^{11}$

$c)\ 10\,100\,000\,000 = 1.01 \cdot 10^{10}$

$d)\ 8\,300\,004\,000\,000 = 8.300004 \cdot 10^{12} \simeq 8.3 \cdot 10^{12}$

Lösung 2:

$8765.81 = 8.76581 \cdot 10^{3} \simeq 8.8 \cdot 10^{3}\ \text{h}$

$525949 = 5.25949 \cdot 10^{5} \simeq 5.3 \cdot 10^{5}\ \text{min}$

Abb. 1-6: Ein Elephant in Hagenbecks Tierpark, Hamburg

Das Gewicht eines asiatischen Elephanten in Hagenbecks Tierpark:

$$5400 \text{ kg} = 5.4 \cdot 10^3 \text{ kg} = 5.4 \text{ t}$$

$$1 \text{ t} = 1.000 \text{ kg}$$

Abb. 1-7: Blauwal (https://en.wikipedia.org/wiki/File:Blue_whale_tail.JPG)

Gewicht und Länge eines Blauwals sind etwa 170 Tonnen und 27 Meter:

$$170 \text{ t} = 170 \cdot 10^3 = 170\,000 = 1.7 \cdot 10^5 \text{ kg}$$

$$27 \text{ m} = 2.700 = 2.7 \cdot 10^3 \text{ cm}$$

https://johnosullivan.files.wordpress.com/2012/11/sun-heats-earth-on-one-hemisphere-only.jpg

Abb. 1-8: Sonne und Erde

Lösung 5:

$$M_{Sonne} = 1\ 988\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ kg = 1.988 \cdot 10^{30}\ kg$$

Lösung 6: $9\ 461\ 000\ 000\ 000\ 000\ m = 9.461 \cdot 10^{15}\ m$

Abb. 1-9: Spinosaurus

$$113 \text{ Millionen Jahre} = 113 \cdot 10^{6} = 1.13 \cdot 10^{8} \text{ Jahre}$$

$$94 \text{ Millionen Jahre} = 94 \cdot 10^{6} = 9.4 \cdot 10^{7} \text{ Jahre}$$

Beispiel: Schreiben Sie das Produkt $2.762 \cdot 10^4$ als Dezimalzahl.

Lösung:

Zuerst schreiben wir die Zahl zehn hoch 4 in Form einer vierfachen Multiplikation, dann als Zahl mit vier Nullen, 10 000 also. Dann multiplizieren wir 2.762 mit 10 000:

$$2.762 \cdot 10^4 = 2.762 \cdot (10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10) = 2.762 \cdot 10\,000 = 27620$$

Wir schieben das Komma um 4 Stellen nach rechts:

$$2.762 \cdot 10^4 \rightarrow 27.62 \cdot 10^3 \rightarrow 276.2 \cdot 10^2 \rightarrow 2762 \cdot 10 \rightarrow 27620$$

Aufgabe 8: Schreiben Sie die Produkte als Dezimalzahlen.

$a)\ 2.19 \cdot 10^{3}, \qquad b)\ -3.027 \cdot 10^{5}$

$c)\ 1.001 \cdot 10^{6}, \qquad d)\ 4.14 \cdot 10^{7}$

Aufgabe 9: Schreiben Sie die Zahlen in wissenschaftlicher Notation

$a)\ 3^{7}, \qquad b)\ 4^{8}, \qquad c)\ 8^{4}, \qquad d)\ 11^{5}.$

Lösung 8:

$a)\ \ 2.19 \cdot 10^{3} \to 21.9 \cdot 10^{2} \to 219 \cdot 10 \to 2190$

$b)\ \ -3.027 \cdot 10^{5} \to -30.27 \cdot 10^{4} \to -302.7 \cdot 10^{3} \to -3027 \cdot 10^{2} \to$

$\to -30270 \cdot 10 \to -302700$

$c)\ \ 1\,001 \cdot 10^{6} = 1\,001\,000$

$d)\ \ 4.14 \cdot 10^{7} = 41\,400\,000$

Lösung 9:

$a)\ \ 3^{7} = 2187 = 2.187 \cdot 10^{3}$

$b)\ \ 4^{8} = 65\,536 = 6.5536 \cdot 10^{4} \simeq 6.55 \cdot 10^{4}$

$c)\ \ 8^{4} = 4096 = 4.096 \cdot 10^{3} \simeq 4.1 \cdot 10^{3}$

$d)\ \ 11^{5} = 161\,051 = 1.61051 \cdot 10^{5} \simeq 1.61 \cdot 10^{5}$

a) $271.900.000 = 2.719 \cdot 10^8$

b) $143.000.000.000 = 1.43 \cdot 10^{11}$

c) $10.100.000.000 = 1.01 \cdot 10^{10}$

d) $8.300.004.000.000 = 8.300004 \cdot 10^{12} \simeq 8.3 \cdot 1$

$8765.81 = 8.76581 \cdot 10^3 \simeq 8.8 \cdot 10^3$ h

$525949 = 5.25949 \cdot 10^5 \simeq 5.3 \cdot 10^5$ min

Begriffserklärung

Die Definition einer Potenz hat zunächst nur dann Sinn, wenn n eine natürliche Zahl mit $n > 1$ ist. Um Potenzen mit Exponenten beliebiger natürlicher Zahlen, also auch mit $n = 0, 1$ bilden zu können, wird die Potenzdefinition durch

$$b^1 = b \quad , \qquad b \in \mathbb{R}$$

und

$$0^n = 0 \qquad n \neq 0, \qquad 1^n = 1$$

für alle zulässigen Werte des Exponenten n erweitert.

Potenzen von negativen Zahlen mit geraden Exponenten sind positiv, mit ungeraden Exponenten – negativ.

$$(-b)^{2n} = b^{2n}, \qquad (-b)^{2n+1} = -b^{2n+1}$$

Die Spezialfälle der Formeln

$$(-1)^{2n} = 1, \qquad (-1)^{2n+1} = -1$$

werden häufig benutzt.

$$(-1)^{4} = (-1)(-1)(-1)(-1) = 1$$

$$(-1)^{5} = (-1)(-1)(-1)(-1)(-1) = -1$$

Es besteht ein Unterschied zwischen

$$(-b)^n \qquad \text{und} \qquad -b^n, \qquad b > 0$$

Hier ist die Reihenfolge der Rechenoperation zu beachten! Im ersten Fall soll die negative Zahl $-b$ potenziert werden. Das Ergebnis wird positiv oder negativ, je nachdem der Exponent eine gerade oder ungerade Zahl ist. Im zweiten Fall wird b zuerst potenziert und dann mit -1 multipliziert.

$$(-2)^2 = 2^2 = 4, \qquad -2^2 = -4$$

Basis und Exponent einer Potenz dürfen nicht miteinander vertauscht werden

$$b^n \neq n^b$$

Die ursprüngliche Definition des Potenzbegriffs ist nur für ganzzahlige positive Exponenten gemeint, denn eine Zahl b kann wohl *3* mal, aber nicht (-3) mal als Faktor in einem Produkt auftreten.

Es erweist sich jedoch für viele Probleme als nützlich, neben den Potenzen mit Exponent Null auch Potenzen mit ganzzahligen negativen Exponenten zuzulassen.

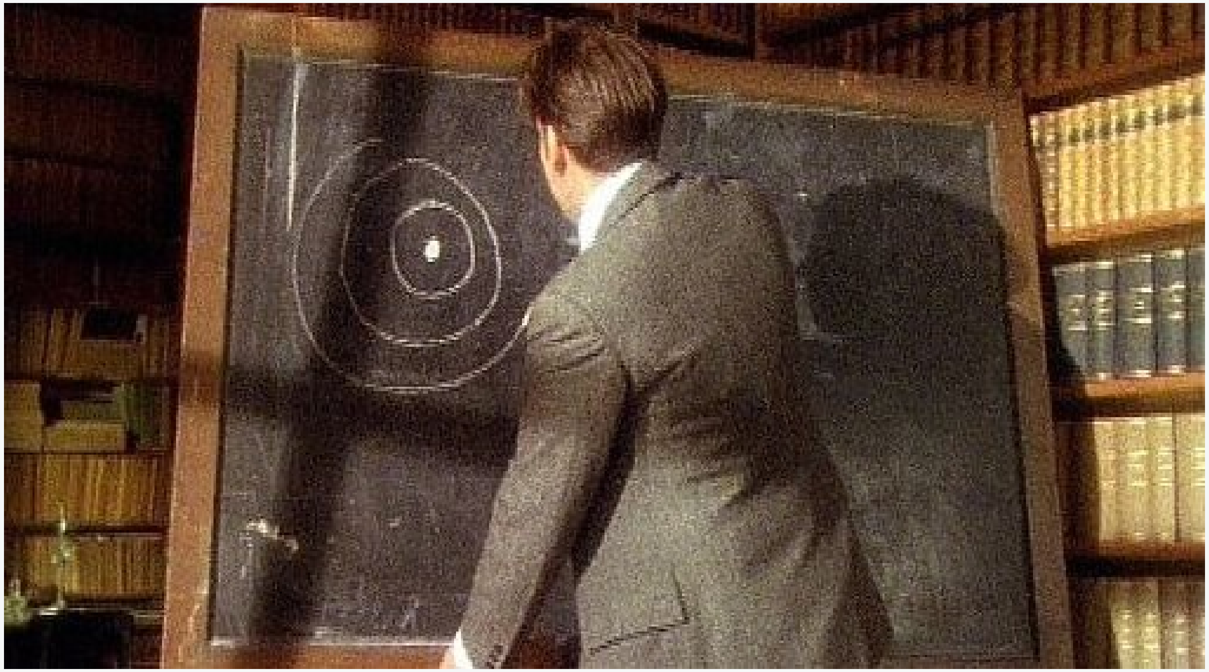
Definition: Für jede reelle Zahl b und eine natürliche Zahl n gilt

$$b^0 = 1, \qquad b^{-n} = \frac{1}{b^n}, \qquad b^n = \frac{1}{b^{-n}}, \qquad b \neq 0$$

Beispiele:

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{10 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10}$$

$$0.0005 = \frac{5}{10000} = \frac{5}{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10} = 5 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = 5 \cdot 10^{-4}$$



http://programm.ard.de/sendungsbilder/teaser_huge/008/POCUTF8_7217986448_Original_Daccord.JPEG

Niels Bohr und sein Atommodel

Das Elektron ist ein negativ geladenes Elementarteilchen mit der Masse

$$m_e \simeq 0.\underbrace{0000000000000000000000000000009}_{31 \textit{ Dezimalstellen}} = 9 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}\,.$$

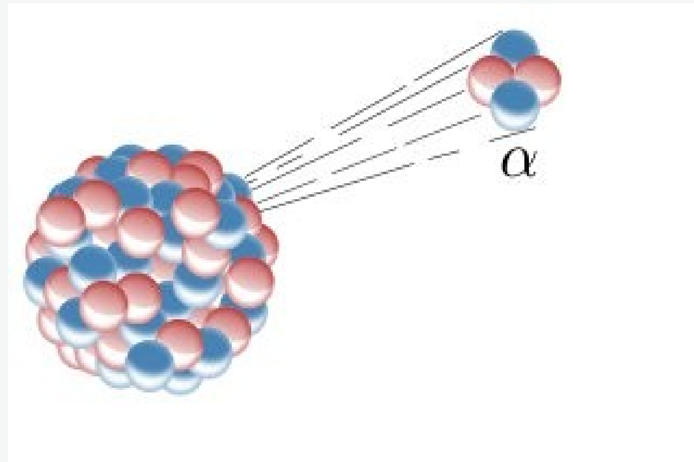


Illustration zur Alphastrahlung oder α-Strahlung.

Alpha-Teilchen, bezeichnet als α, sind ziemlich schwere, positiv geladene Teilchen, die von gewissen radioaktiven Atomen ausgesandt werden. Sie bestehen aus zwei Protonen und zwei Neutronen. Die Masse eines Alpha-Teilchen ist

$$m_\alpha \simeq 0.\underbrace{000000000000000000000000066}_{\text{27 Dezimalstellen}} = 6.6 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}\,.$$

Darstellung einer Zahl, kleiner als 1, in wissenschaftlicher Notation:

$$0.000357 = 3.57 \cdot 10^{-4}$$

Aufgabe 10: Schreiben Sie die Zahlen in wissenschaftlicher Notation:

$a)$ 0.0000026

$b)$ 0.000000097

$c)$ 0.00000000034

Aufgabe 11: Schreiben Sie die Masse eines Elektrons in wissenschaftlicher Notation:

$$m_e = 0.\underbrace{0000000000000000000000000009}_{28\ Dezimalstellen}\ g$$

Lösung 10:

a) $0.0000026 = 2.6 \cdot 10^{-6}$

b) $0.000000097 = 9.7 \cdot 10^{-8}$

c) $0.00000000034 = 3.4 \cdot 10^{-10}$

Lösung 11:

$$m_e = 0.\underbrace{0000000000000000000000000009}_{28\ \textit{Dezimalstellen}}\ g = 9 \cdot 10^{-28}\ g$$

Beispiel: Schreiben Sie das Product $3.004 \cdot 10^{-3}$ als Dezimalzahl.

Lösung:

Dieses Produkt kann man in folgender Form schreiben:

$$3.004 \cdot 10^{-3} = 3.004 \cdot \left(\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \right) = 3.004 \cdot 0.001 = 0.003004$$

Wir schieben das um Komma 3 Stellen nach links:

$$3.004 \cdot 10^{-3} \rightarrow 0.3004 \cdot 10^{-2} \rightarrow 0.03004 \cdot 10^{-1} \rightarrow 0.003004$$

Aufgabe 12: Schreiben Sie die Produkte als Dezimalzahl:

$a)\ 7.42 \cdot 10^{-3}$, $\quad b)\ 82.06 \cdot 10^{-5}$

$c)\ 3.705 \cdot 10^{-6}$, $\quad d)\ -8.03 \cdot 10^{-12}$

$e)\ 0.025 \cdot 10^{-4}$, $\quad f)\ -0.111 \cdot 10^{-9}$

Aufgabe 13: Schreiben Sie die Zahlen in wissenschaftlicher Notation

$a \cdot 10^{n}, \quad 1 \leqslant |a| \leqslant 10, \quad n \in \mathbb{Z}$

$a)\ 0.0000495$, $\quad b)\ 0.0000003007$,

$c)\ -0.0003004$, $\quad d)\ -0.0000000000000000000000135$.

Lösung 12:

$a)\;\; 7.42 \cdot 10^{-3} = 0.00742$

$b)\;\; 82.06 \cdot 10^{-5} = 0.0008206$

$c)\;\; 3.705 \cdot 10^{-6} = 0.000003705$

$d)\;\; -8.03 \cdot 10^{-12} = -0.00000000000803$

$e)\;\; 0.025 \cdot 10^{-4} = 2.5 \cdot 10^{-6} = 0.0000025$

$f)\;\; -0.111 \cdot 10^{-9} = -0.000000000111$

Lösung 13:

$a)\;\; 0.0000495 = 4.95 \cdot 10^{-5}$

$b)\;\; 0.0000003007 = 3.007 \cdot 10^{-7}$

$c)\;\; -0.0003004 = -3.004 \cdot 10^{-4}$

$d)\;\; -0.00000000000000000000000135 = -1.35 \cdot 10^{-23}$

Aufgabe 14: Bestimmen Sie den Wert

$a)\ (0.5)^{-2}, \qquad b)\ (0.25)^{-4}, \qquad c)\ (0.2)^{-3}$

Aufgabe 15: Bestimmen Sie c

$$a)\ \ c = 7^0 + 2^2 + \frac{1}{2} - 2^{-1} - 3, \qquad b)\ \ c = 0^2 + 5^0 + 4^2 + 2^{-2}$$

Aufgabe 16: Bestimmen Sie den Wert der algebraischen Ausdrücke

$3^0, \qquad a^0, \qquad (a \cdot b)^0, \qquad a^0 + b^0, \qquad a^0 + (a \cdot b)^0 + c^0$

Die Rechnung wird viel einfacher, wenn man den Dezimalbruch in Form eines echten Bruches darstellt

$$a)\quad (0.5)^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2}} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

$$b)\quad 0.25^{-4} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^{4}} = \frac{1}{\frac{1}{256}} = 256$$

$$c)\quad (0.2)^{-3} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = \left(5^{-1}\right)^{-3} = 5^{3} = 125$$

Lösung 15: $a)\quad 7^0 = 1, \qquad 2^2 = 4, \qquad 2^{-1} = \dfrac{1}{2}$

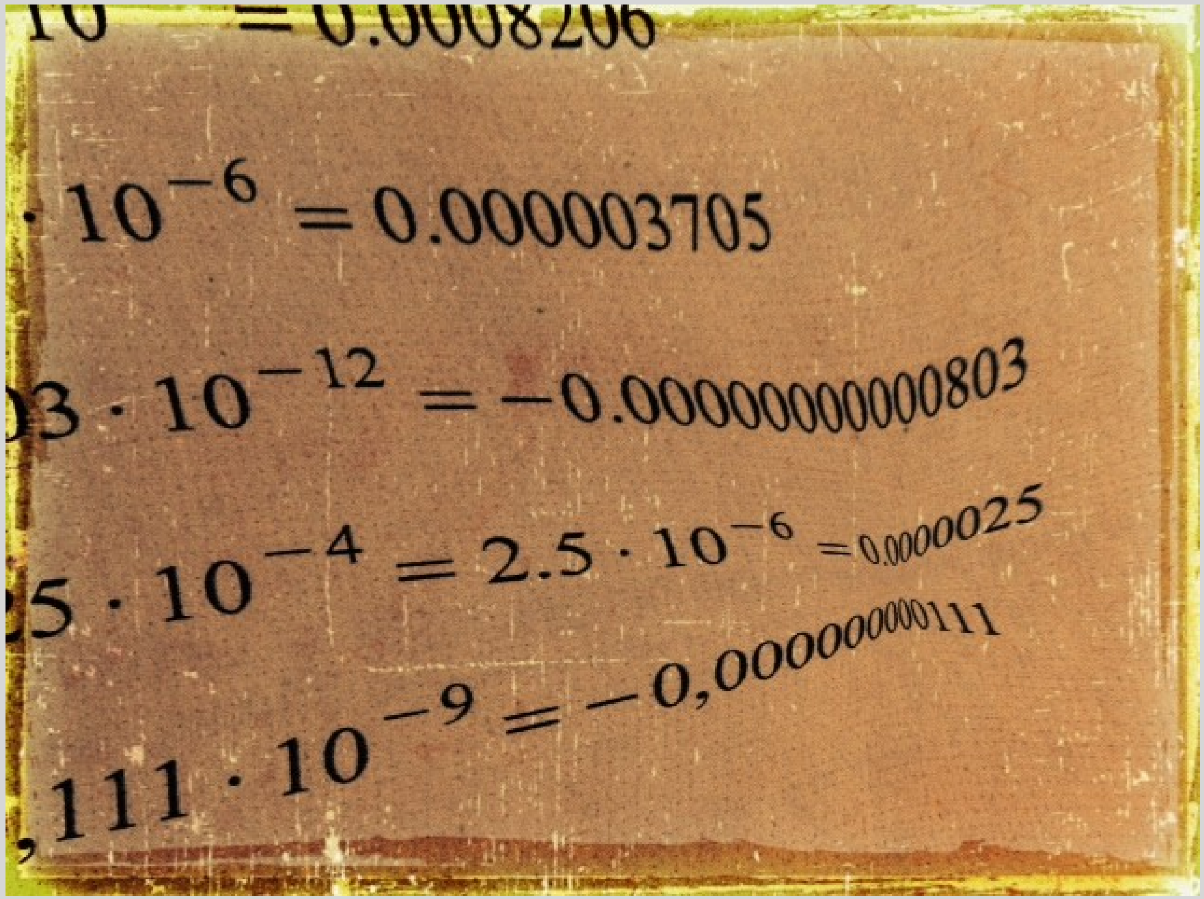
$$c = 7^0 + 2^2 + \frac{1}{2} - 2^{-1} - 3 = 1 + 4 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 3 = 2$$

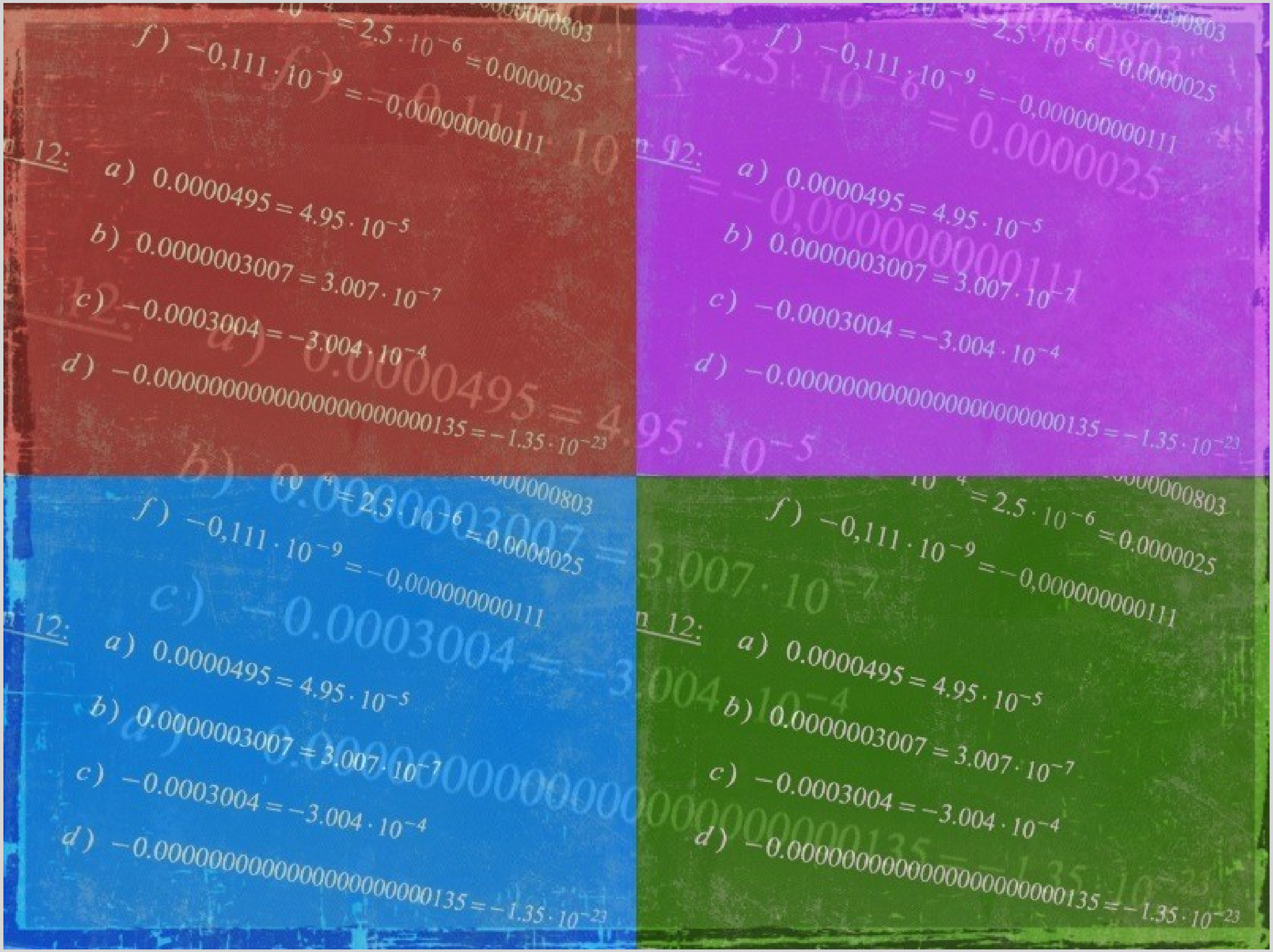
$b)\quad 0^2 = 0, \qquad 5^0 = 1, \qquad 4^2 = 16, \qquad 2^{-2} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$

$$c = 0^2 + 5^0 + 4^2 + 2^{-2} = 0 + 1 + 16 + \frac{1}{4} = 17.25$$

Lösung 16: $3^0 = 1, \qquad a^0 = 1, \qquad (a \cdot b)^0 = 1$

$$a^0 + b^0 = 1 + 1 = 2, \qquad a^0 + (a \cdot b)^0 + c^0 = 1 + 1 + 1 = 3$$


10 = 0.0008206
· 10^−6 = 0.000003705
3 · 10^−12 = −0.00000000000803
5 · 10^−4 = 2.5 · 10^−6 = 0.0000025
111 · 10^−9 = −0,00000000111


f) −0,111 · 10^−9 = −0,000000000111
= 2.5 · 10^−6 = 0.0000025
12:
a) 0.0000495 = 4.95 · 10^−5
b) 0.0000003007 = 3.007 · 10^−7
c) −0.0003004 = −3.004 · 10^−4
d) −0.0000000000000000000000135 = −1.35 · 10^−23