Scheitelpunkt, Schnittpunkte, quadratische Ergänzung

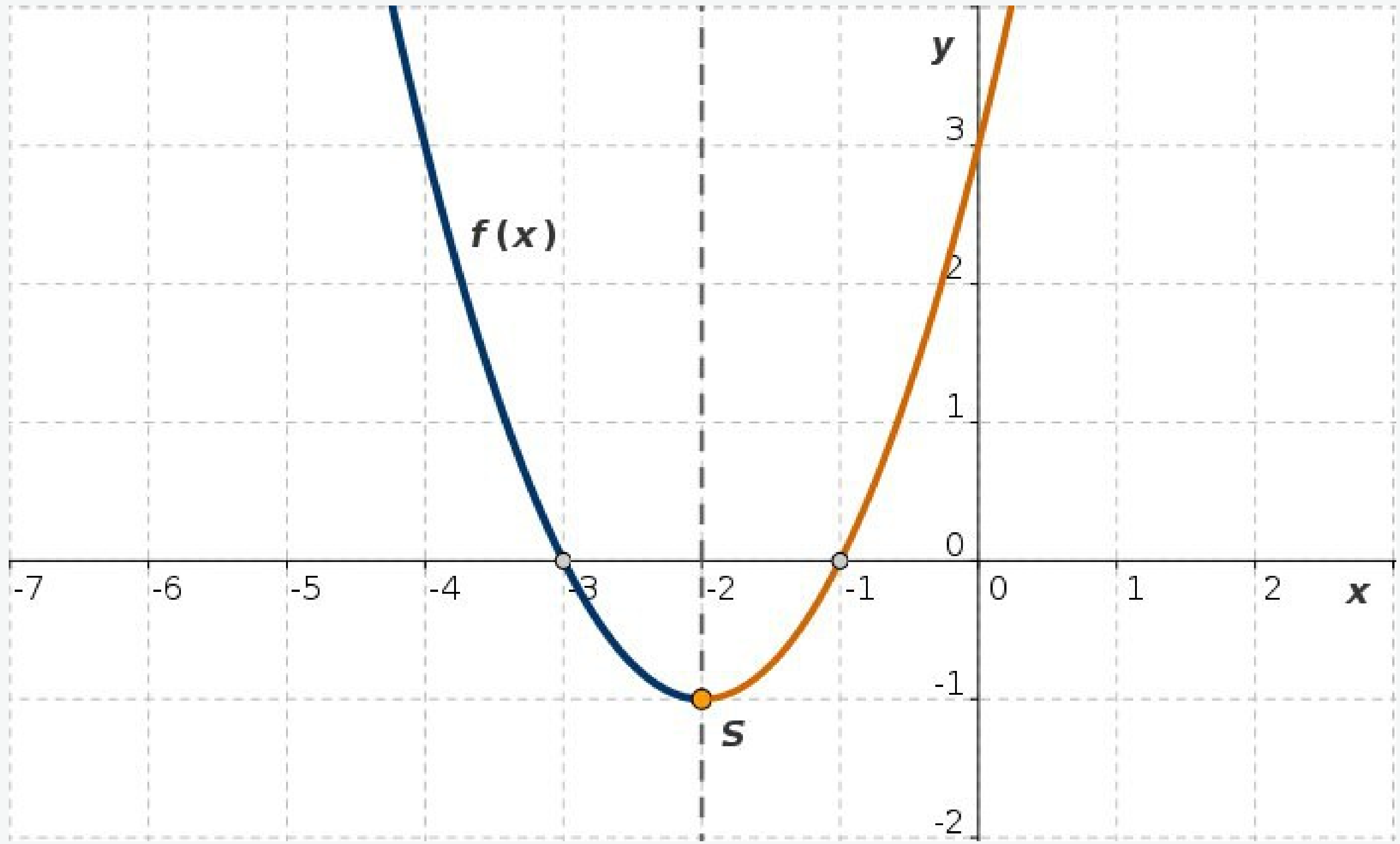


Abb. 6-1: Graphische Darstellung der Funktion $y = f(x)$

$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c = x^2 + 4\,x + 3 \qquad (a = 1)$$

$a > 0$: Die Parabel ist nach oben geöffnet. Der Scheitelpunkt $S = (-2, -1)$ ist zugleich Tiefpunkt. Die Gerade $x = -2$ ist Symmetrieachse.

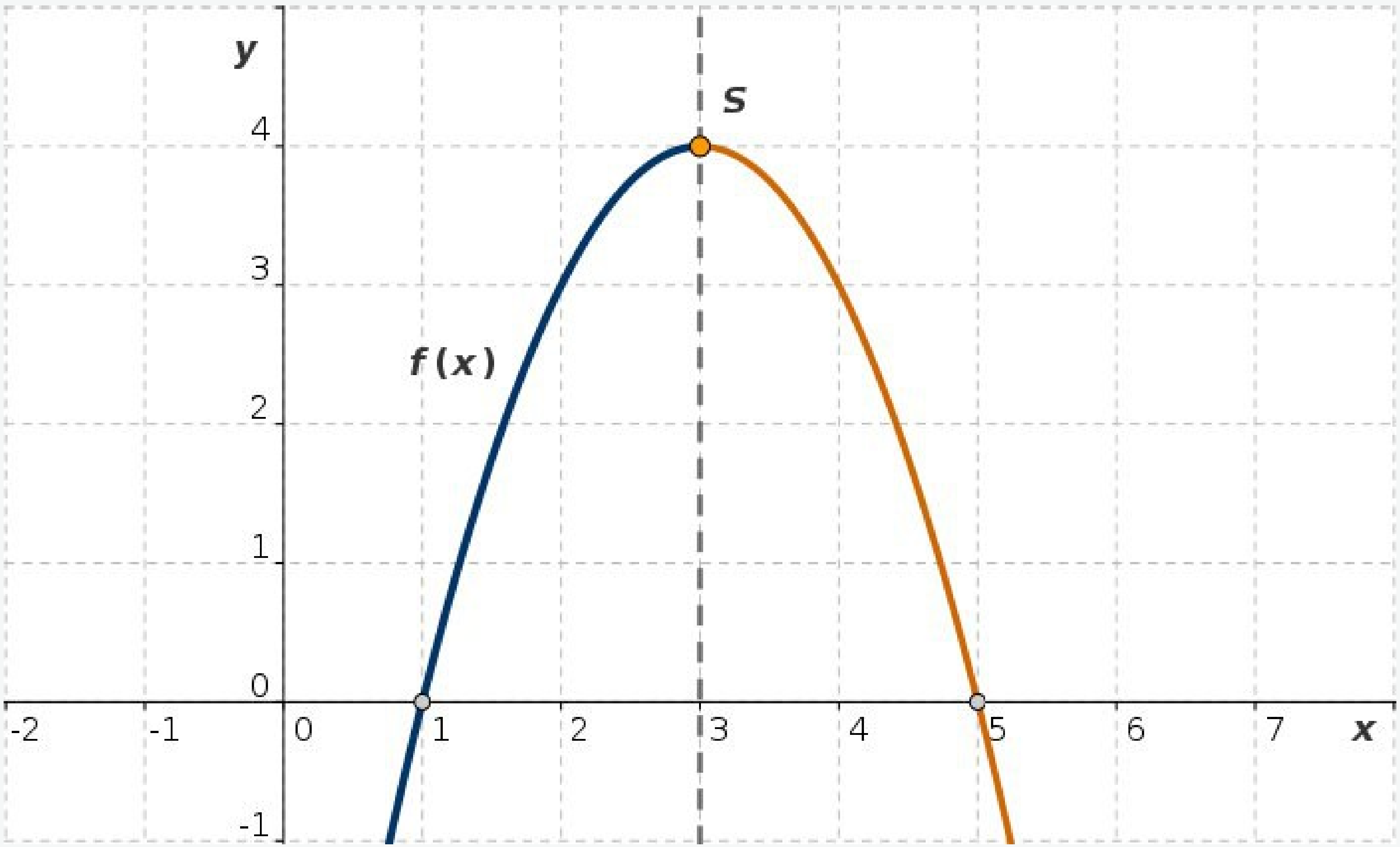
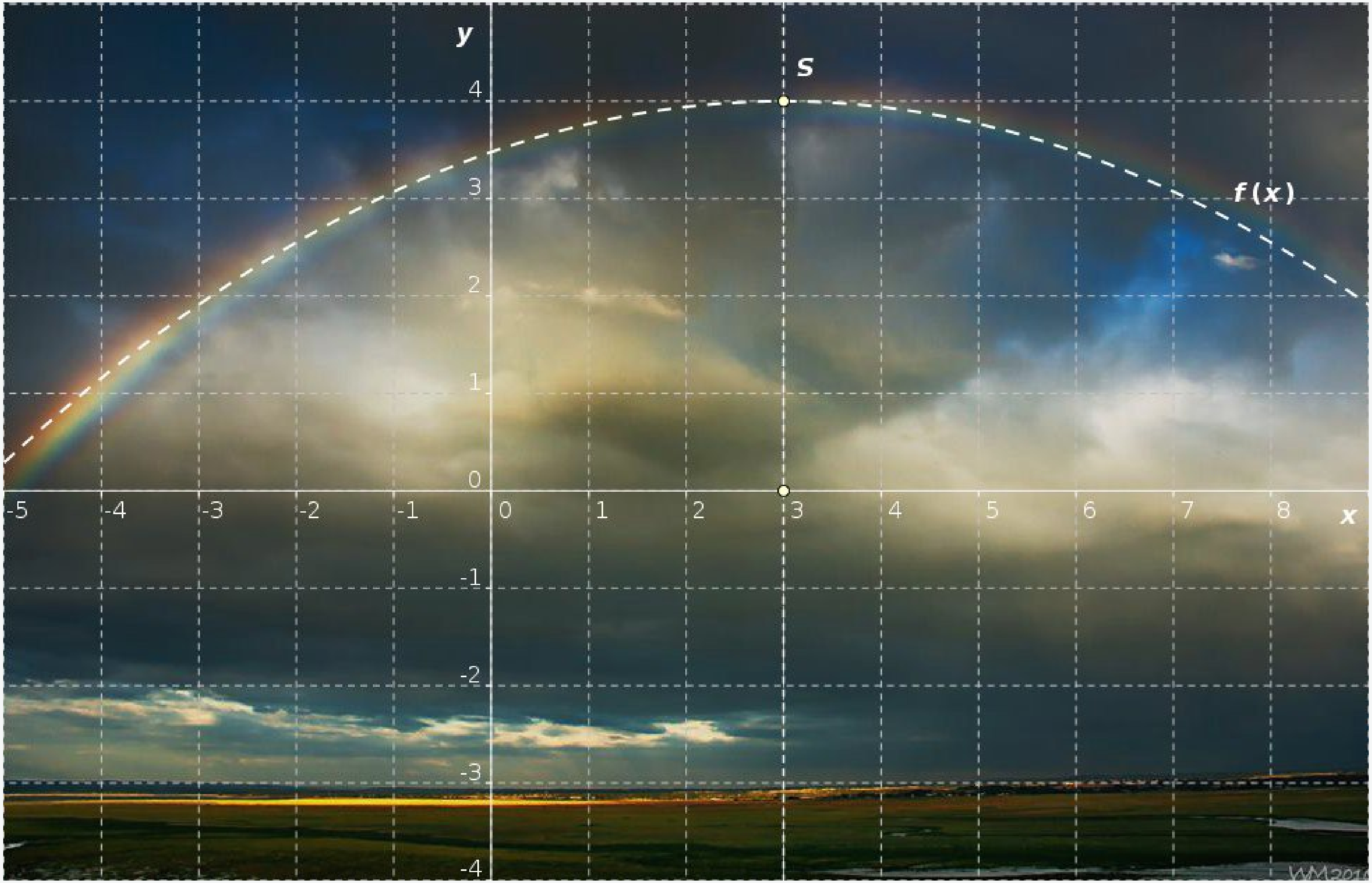


Abb. 6-2: Graphische Darstellung der Funktion $y = f(x)$

$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c = -x^2 + 6\,x - 5 \qquad (a = -1)$$

$a < 0$: Die Parabel ist nach unten geöffnet. Der Scheitelpunkt $S = (3, 4)$ ist zugleich Hochpunkt. Die Gerade $x = 3$ ist Symmetrieachse.



http://www.fotocommunity.de/search?q=arc+regenbogen&index=fotos&options=YToyOntzOjU6InN0YXJ0IjtpOjA7czo3OiJkaXNwbGF5IjtzOjg6IjEyNzAyMzU1Ijt9/pos/10

Abb. 6-3: Eine Darstellung der nach unten geöffneten quadratischen Funktion $y = f(x)$

$$f(x) = -0.06\,(x - 3)^2 + 4$$

http://www.fotocommunity.de/search?q=regenbogen&index=fotos&options=YToyOntzOjU6InN0YXJ0IjtpOjA7czo3OiJkaXNwbGF5IjtzOjc6IjMxMDUyMzAiO30/pos/193

Abb. 6-4: Eine Darstellung der nach unten geöffneten quadratischen Funktion $y = f(x)$

$$f(x) = -0.09\,(x - 3)^2 + 4.1$$

Wir zeigen, dass eine quadratische Funktion

$$y = a\,x^2 + b\,x + c$$

in die Form $y = a\,(x - m)^2 + n$ gebracht werden kann.

$$a\,x^2 + b\,x + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left[x^2 + 2\,x\,\frac{b}{2\,a} + \left(\frac{b}{2\,a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2\,a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2 + \frac{4\,a\,c - b^2}{4\,a^2}\right] =$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2 + \frac{4\,a\,c - b^2}{4\,a}$$

$$= a\,(x - m)^2 + n$$

$$m = -\frac{b}{2\,a}, \qquad n = \frac{4\,a\,c - b^2}{4\,a}$$

Wir haben gezeigt, dass die quadratische Funktion

$$y = a\,x^2 + b\,x + c$$

in die Form

$$y = a\,(x - m)^2 + n$$

gebracht werden kann. Aus dieser Gleichung ist abzulesen

- der Scheitelpunkt $S\,(m, n)$,
- die Streckung bzw. Stauchung gegenüber der Normalparabel durch den Faktor $|\,a\,|$,
- die Öffnungsrichtung der Parabel (Vorzeichen von a).

Aufgabe 5:

Bringen Sie folgende quadratische Funktionen

a) $y = x^2 + 4x - 1$

b) $y = x^2 - 4x + 7$

c) $y = -2x^2 - 4x + 2$

in die Form $y = a(x - m)^2 + n$

Aufgabe 6:

Bestimmen Sie die Seitenlängen des Rechtecks, das von allen Rechtecken mit Umfang 24 die größte Fläche hat.

Aufgabe 7:

Bestimmen Sie den minimalen Wert der Funktion

$$y = \sqrt{x^2 + x + 1}$$

$$y = a\,x^2 + b\,x + c = a\,(x - m)^2 + n$$

$$m = -\frac{b}{2\,a}, \qquad n = \frac{4\,a\,c - b^2}{4\,a}$$

a) $y = x^2 + 4\,x - 1, \qquad a = 1, \quad b = 4, \quad c = -1 \quad \Rightarrow$

$$m = -\frac{b}{2\,a} = -2, \qquad n = \frac{4\,a\,c - b^2}{4\,a} = \frac{-4 - 16}{4} = -5$$

$$y = x^2 + 4\,x - 1 = (x + 2)^2 - 5$$

b) $y = x^2 - 4\,x + 7, \qquad a = 1, \quad b = -4, \quad c = 7 \quad \Rightarrow$

$$m = -\frac{b}{2\,a} = 2, \qquad n = \frac{4\,a\,c - b^2}{4\,a} = 3$$

$$y = x^2 - 4\,x + 7 = (x - 2)^2 + 3$$

c) $y = -2\,x^2 - 4\,x + 2 = -2\,(x + 1)^2 + 4$

Die andere Möglichkeit, eine quadratische Funktion $y = a\,x^2 + b\,x + c$ in Form $y = a\,(x - m)^2 + n$ darzustellen, ist die quadratische Ergänzung.

Mit Hilfe der binomischen Formel:

$$(x + r)^2 = x^2 + 2\,r\,x + r^2$$

kann man quadratische und lineare Terme der Gleichung durch ein quadratisches Binom und ein absolutes Glied darstellen:

$$a)\quad x^2 + 4\,x = x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x \overbrace{=}^{(r=2)} x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 - 2^2 = (x + 2)^2 - 4$$

$$y = x^2 + 4\,x - 1 = (x + 2)^2 - 4 - 1 = (x + 2)^2 - 5$$

$$b)\quad x^2 - 4\,x = x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x \overbrace{=}^{(r=-2)} x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 - 2^2 = (x - 2)^2 - 4$$

$$y = x^2 - 4\,x + 7 = (x - 2)^2 - 4 + 7 = (x - 2)^2 + 3$$

$$c)\quad y = -2\,x^2 - 4\,x + 2 = -2\,(x^2 + 2\,x) + 2 = -2\,(x^2 + 2\,x + 1 - 1) + 2 =$$

$$= -2\,((x + 1)^2 - 1) + 2 = -2\,(x + 1)^2 + 4$$

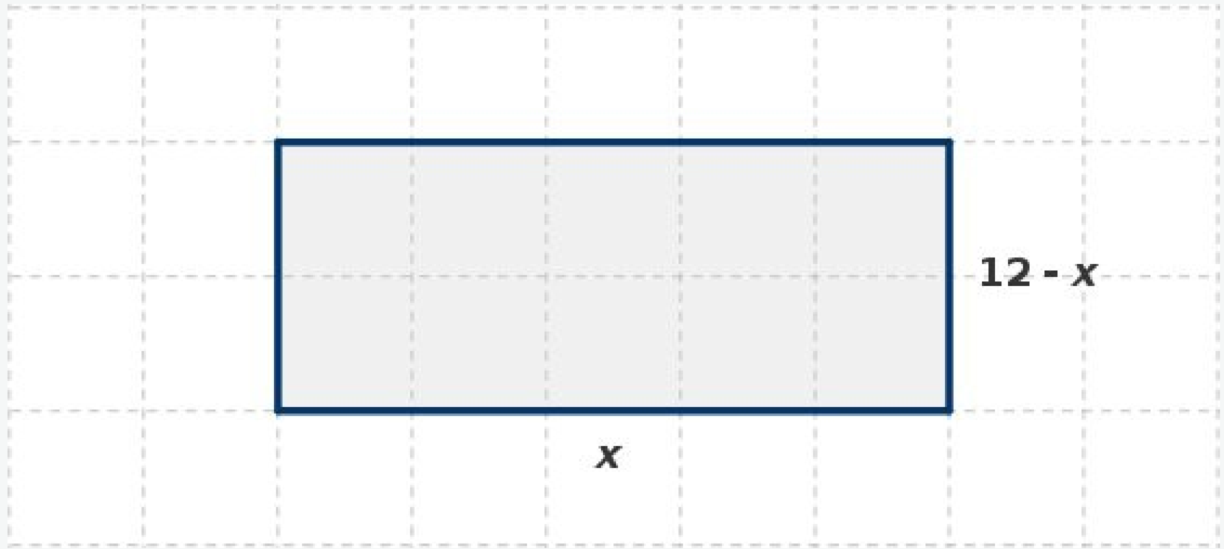


Abb. L6-1: Zur Lösung der Aufgabe

$$U = 2x + 2y \quad \Rightarrow \quad y = 12 - x$$

Die Fläche des Rechteckes wird auf folgende Weise bestimmt

$$S = x\,(12 - x) = 12x - x^2 = 36 - (x - 6)^2$$

Für $x = 6$ hat die Fläche den maximalen Wert *36*.
In diesem Fall ist das Rechteck ein Quadrat.

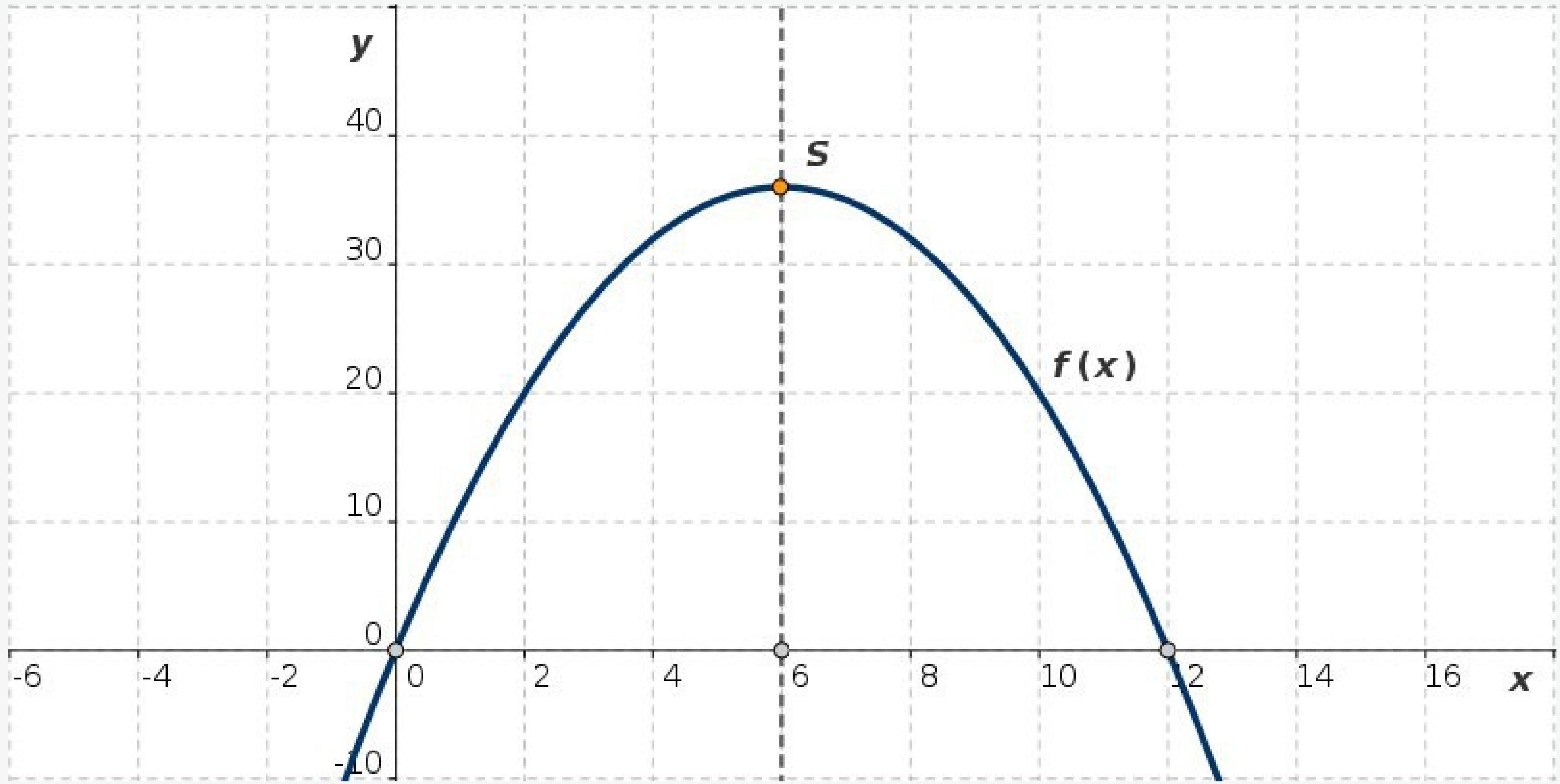


Abb. L6-2: Graphische Darstellung der Funktion $f(x) = 12x - x^2$

Um den minimalen Wert der Funktion

$$y = \sqrt{x^2 + x + 1} \equiv \sqrt{f(x)}$$

zu bestimmen, finden wir zuerst den minimalen Wert der Funktion

$$f(x) = x^2 + x + 1$$

Diese Funktion ist eine nach oben geöffnete Parabel mit dem Tiefpunkt $S(m, n)$

$$f(x) = x^2 + x + 1 = x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 =$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

$$S = \left(-\frac{1}{2}, \ \frac{3}{4}\right)$$

$$y_{min} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0.866$$

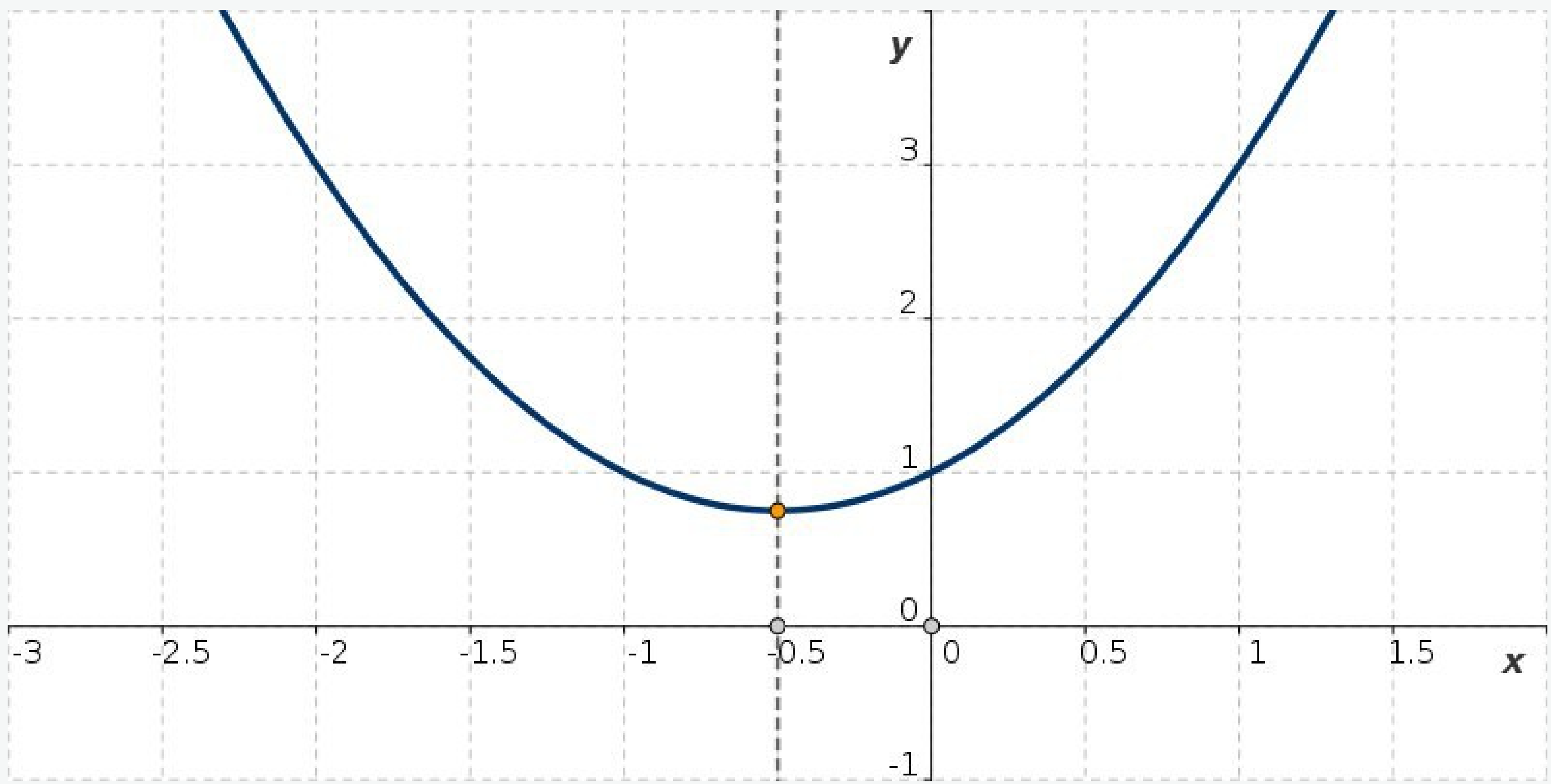


Abb. L7: Graphische Darstellung der Funktion $f(x) = x^2 + x + 1$

Die Graphen von Funktionen mit $f(x) = x^2 + p\,x + q$ können in Abhängigkeit von der Lage ihres Scheitelpunktes zwei Schnittpunkte, genau einen oder keinen Schnittpunkt mit der x-Achse haben

Der Scheitelpunkt der Parabel mit $f(x) = x^2 + p\,x + q$ besitzt wegen

$$x^2 + p\,x + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(-\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q\right)$$

die Koordinaten

$$S\left(-\frac{p}{2},\ -\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q\right) = S\left(-\frac{p}{2},\ -D\right)$$

Der Term $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$

wird Diskriminante der quadratischen Funktion

$$f(x) = x^2 + p\,x + q$$

genannt.

Die Nullstellen der Funktion mit der Gleichung $f(x) = x^2 + p\,x + q$ bestimmt man durch Lösung der quadratischen Gleichung

$$x^2 + p\,x + q = 0$$

mit der *p-q-Formel*

$$x_{1,\,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$$

Nullstellen der Funktion $y = x^2 + px + q$

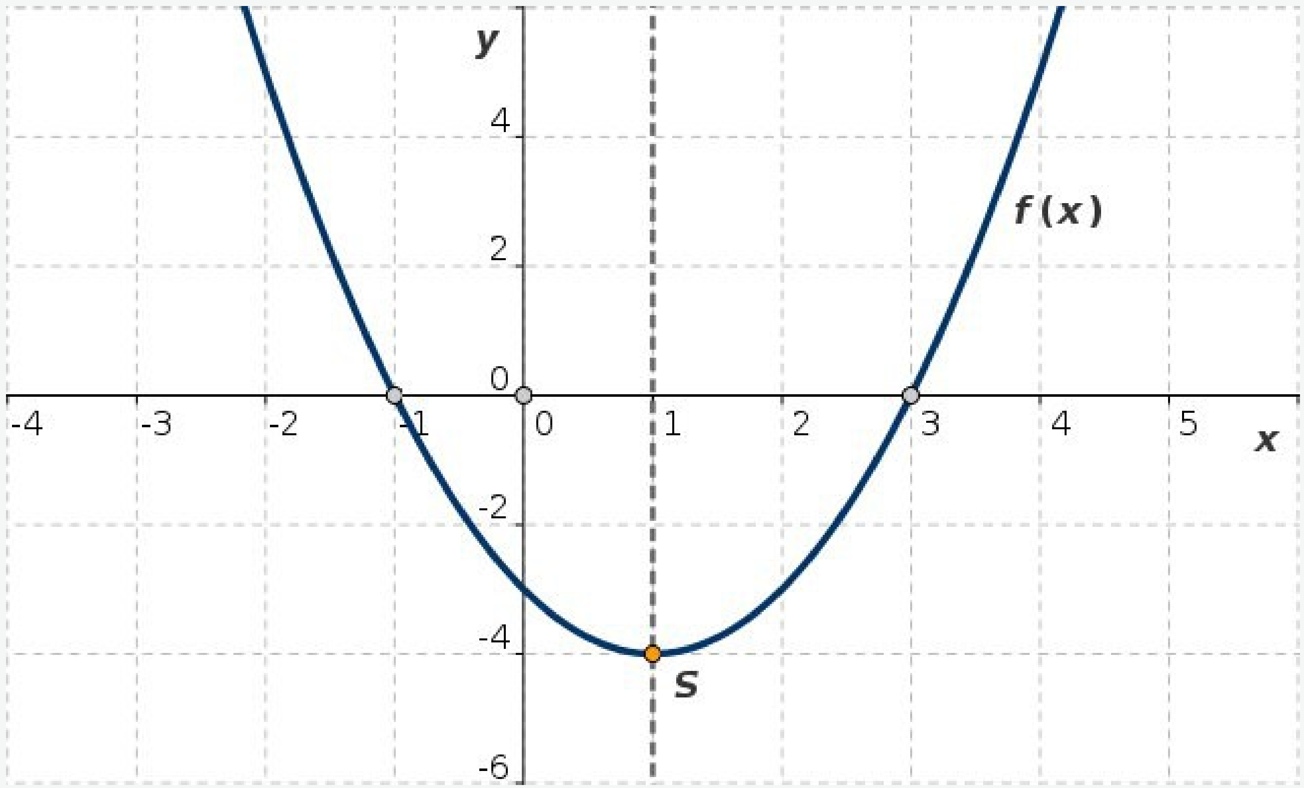


Abb. 7-1: Graphische Darstellung der Funktion f (x) = x² - 2 x - 3

Fall 1: $D = 4\ (> 0)$, zwei Nullstellen

Funktion: $f\,(x) = x^2 - 2\,x - 3, \qquad S\,(1, -4)$

Nulstellen: $x_1 = -1, \qquad x_2 = 3$

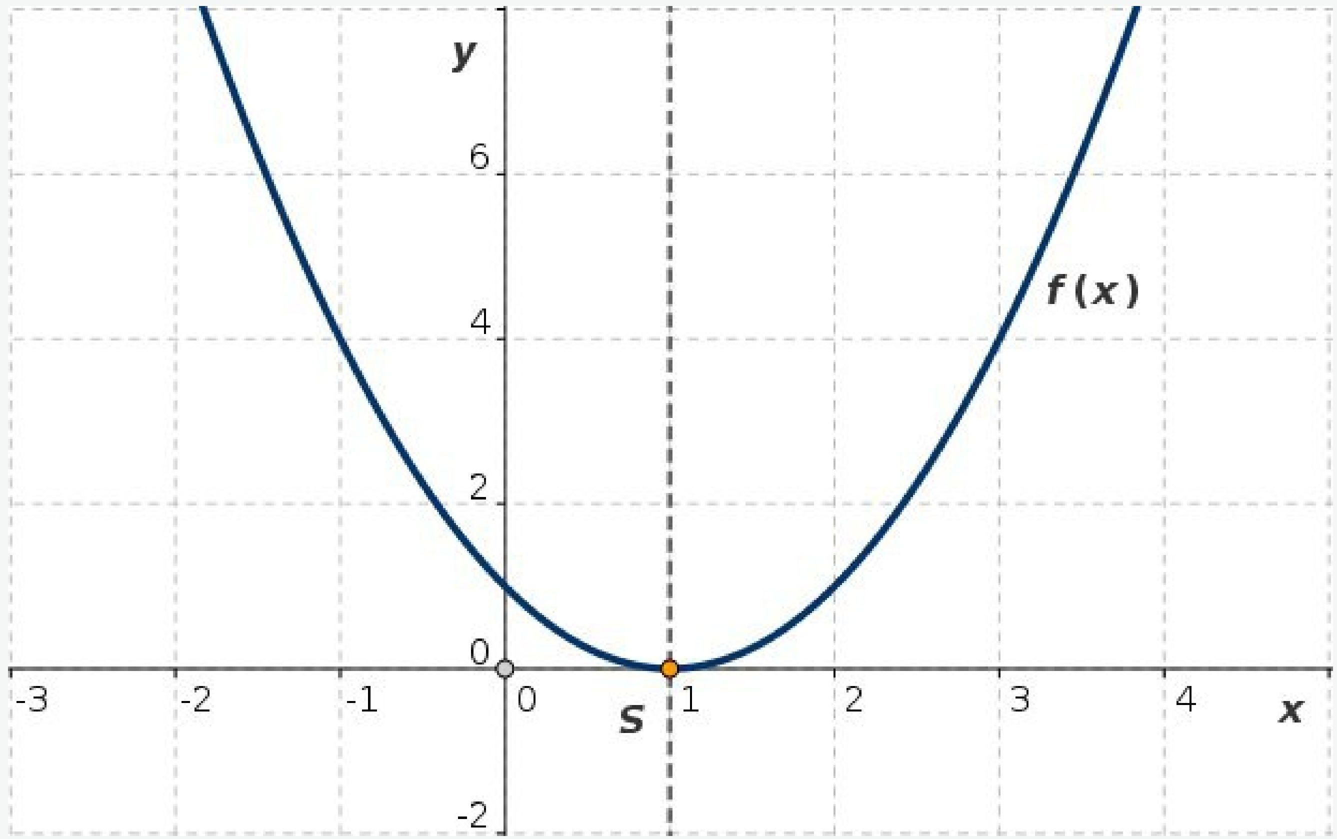


Abb. 7-2: Graphische Darstellung der Funktion $f(x) = x^2 - 2x + 1$

Fall 2: $D = 0$, eine (doppelte) Nullstelle

Funktion: $f(x) = x^2 - 2x + 1, \quad S(1, 0)$

Nulstellen: $x_{1,2} = 1$

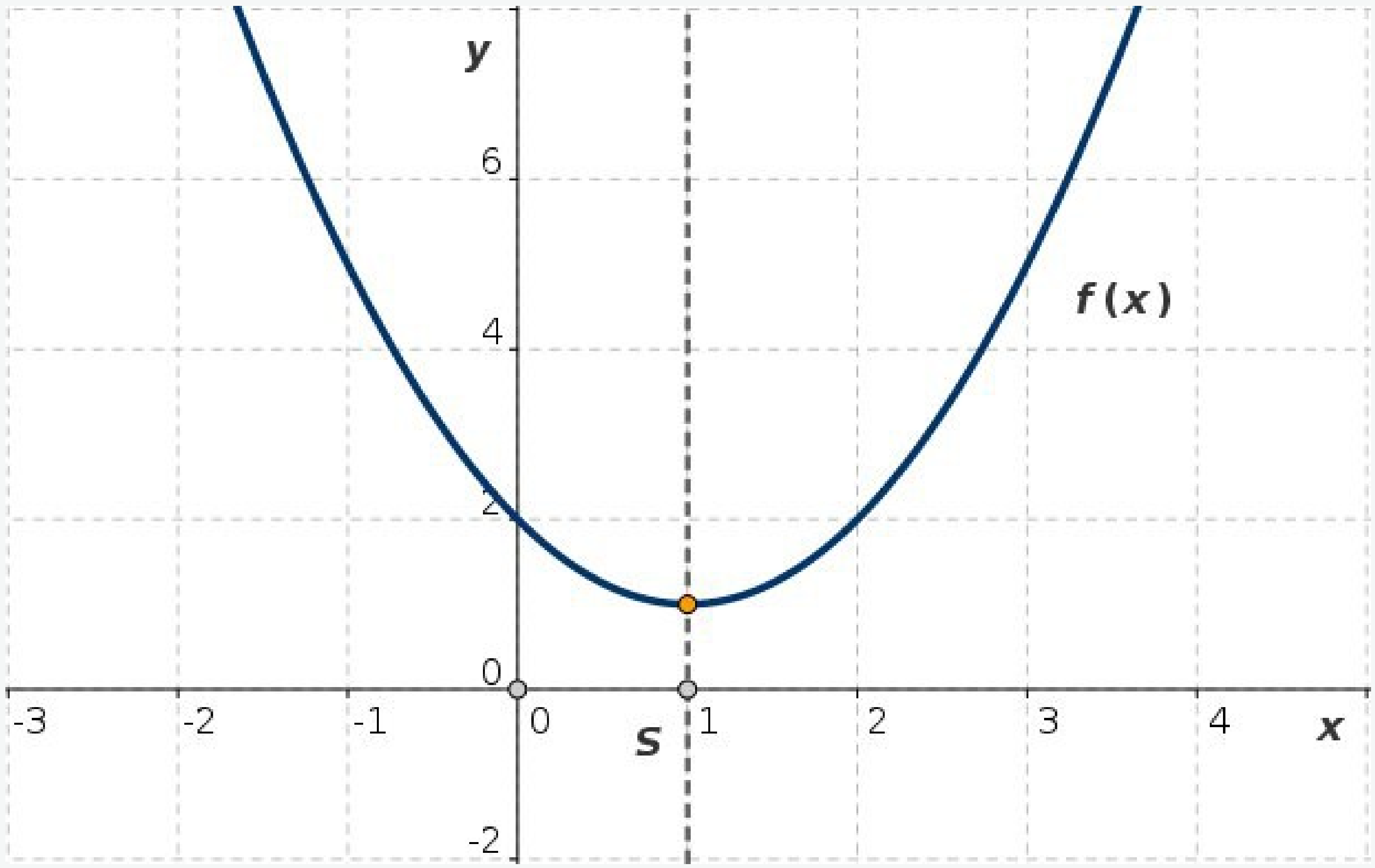


Abb. 7-3: Graphische Darstellung der Funktion $f(x) = x^2 - 2x + 2$

Fall 3: $D = -1$ (< 0), keine Nullstelle

Funktion: $f(x) = x^2 - 2x + 2, \quad S(1, 1)$

Nulstellen: keine