



Vektorrechnung: Aufgaben



Aufgabe 1:

Berechnen Sie den Winkel zwischen den folgenden Vektoren

$$a) \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}; \quad b) \vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie den Parameter t so, dass die Vektoren zueinander orthogonal sind

$$a) \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b) \vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ t^2 \\ 4t \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ t \end{pmatrix}$$

Vektorrechnung: Lösung 1

$$a) \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2}} = \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 3}} = \frac{\sqrt{3}}{1 \cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varphi = 30^\circ$$

$$b) \vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} = \frac{5 - 5}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = 0$$

$$\varphi = 90^\circ$$

$$a) \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \varphi = 90^\circ \Rightarrow \cos \varphi = 0$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{12 + 3t}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = 0 \Rightarrow$$

$$12 + 3t = 0 \Rightarrow t = -4$$

$$b) \vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ t^2 \\ 4t \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ t \end{pmatrix}$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-24 + 4t^2 + 4t^2}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = 0 \Rightarrow$$

$$-24 + 8t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 3 \Rightarrow t = \pm\sqrt{3}$$



Aufgabe 3:

Welche der folgenden Ausdrücken sind sinnvoll und welche sinnlos?

$$a) (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}, \quad b) (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

$$c) \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{c}, \quad d) |\vec{a}| (\vec{b} \cdot \vec{c})$$

$$e) (|\vec{a}| \vec{b}) \cdot \vec{c}, \quad f) \vec{a} \vec{b} + |\vec{a}| \vec{c}$$

Aufgabe 4:

Berechnen Sie das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$

$$a) \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b) \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung 3: *sinnvoll a), b), d), e); nicht sinnvoll c), f)*

Lösung 4: a) $\vec{a} \times \vec{b} = (0, 0, -2)$

 b) $\vec{a} \times \vec{b} = (-1, 3, 2)$