Natürliche und ganze Zahlen

Richard Dedekind (1831-1916) war ein deutscher Mathematiker.

"Die Zahlen sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes, sie dienen als Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer aufzufassen. Durch den rein logischen Aufbau der Zahlen-Wissenschaft sind wir erst in den Stand gesetzt, unsere Vorstellungen von Raum und Zeit genau zu untersuchen. Verfolgen wir genau, was wir beim Zählen der Menge tun: wir beziehen Dinge auf Dinge, bilden ein Ding durch ein Ding ab. Ohne diese Fähigkeit ist überhaupt kein Denken möglich ..."

R. Dedekind, 1887

Budva, Montenegro

In der Entwicklung der Mathematik kann man zwei grundlegende Tendenzen beobachten: alles als *diskret* oder als *kontinuierlich* zu beschreiben.

Die *diskrete* Beschreibung der Natur und der Mathematik benutzt einzelne (atomistische) Elemente, wie etwa die Zahlen 1, 2, 3, . . . Wir erkennen diese Elemente individuell.

Die *kontinuierliche* Beschreibung versucht alle Naturerscheinungen – den Flug, eine Bewegung – zu erklären. Was mit kontinuierlicher Bewegung gemeint ist, glauben wir intuitiv zu wissen. Die Bewegung ist gleichmäßig und ohne Pausen. Für den Begriff der Kontinuität sind die individualistisch auftretenden Zahlen 1, 2, 3, . . . nicht das geeignete mathematische Bild.

http://www.spektrum.de/news/aelteste-hoehlenkunst-europas-ist-40-000-jahre-alt/1154740

Abb: Höhlenmalerei in der Altamira-Höhle. Die ältesten Malereien, die etwa vor 40 000 Jahren entstanden, befinden sich in den Höhlen von El Castillo und Altamira. Sie wären somit das früheste Beispiel europäischer Höhlenkunst

“Wüssten wir mehr über die Geschichte, dann würden wir feststellen, dass sich alle Neuerungen ursprünglich einer großen Weisheit verdanken”

Émile Mâle

https://www.planet-schule.de/fileadmin/dam_media/wdr/speedonauten/img/hg_pferd_felsmalerei.jpg

Abb: Eine Höhlenmalerei aus der Steinzeit, gefunden in Algerien

Die Entwicklung des Zählens ging gemeinsam mit der Entwicklung des Denkens vor sich. Bis es zum abstrakten Zahlbegriff kam, verging eine sehr lange Zeit. Das Gemeinsame zwischen fünf Fingern und fünf Schafen zu erkennen, war ohne Zweifel einer der genialsten Gedanken des Homo sapiens. Obwohl damit das Zählen und Rechnen nur seinen Anfang nahm − das war vor mindestens 30 000 Jahren − waren alle späteren Erfindungen im Vergleich zu diesem ersten Schritt einfacher.

Abb: Felsbild, Valltorta, Maestrazgo, Spanien (Wikipedia)

Anfänge des Zählens kann man schon in den Funden der älteren Steinzeit erkennen, in eingekerbten Knochen und Hölzern. Womöglich dienten die Einschnitte als Zählhilfe: Machte man für jedes Objekt eine Kerbe, konnte man später leicht überprüfen, ob noch alle Schafe oder andere Objekte da waren. Dies war schon ein mathematischer Vorgang.

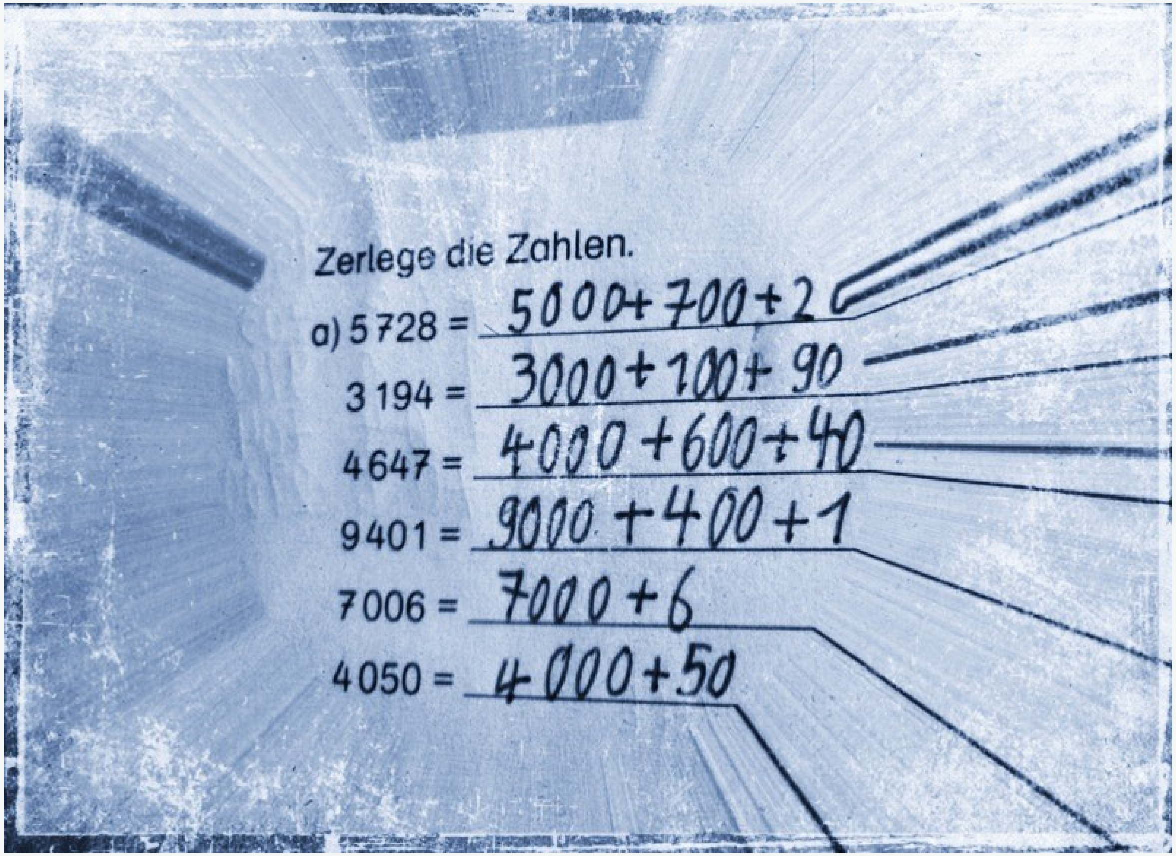
Die Entwicklung des Zählens:

- Erkennen von unterschiedlichen Anzahlen
- Menge gleichartiger Dinge
- Zeichen für Anzahlen von Mengen
- Zahlbegriff und Zahlsystem

Abb.: Der Knochen von Ishango

Natürliche Zahlen

“Die natürlichen Zahlen hat Gott gemacht, alles übrige ist Menschenwerk.”
Leopold Kronecker



$\mathbb{N} = \{\, 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots \}$ – natürliche Zahlen

$\mathbb{N}^* = \{\, 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots \}$ – positive natürliche Zahlen

2, 4, 6, 8 . . . – gerade Zahlen; *1, 3, 5, 7 . . .* – ungerade Zahlen

Welche Operationen und Relationen werden auf der Menge der natürlichen Zahlen betrachtet?

Die Menge der natürlichen Zahlen hat folgende Strukturen und Eigenschaften:

- Addition $(27 + 30 = 57)$
- Multiplikation $(7 \cdot 4 = 28)$
- Ordnungsrelation $(29 < 32,\quad a < b$ oder $a = b$ oder $a > b)$

Die Eigenschaft $n = m$ ist gleichbedeutend mit $m = n$, bzw. $n \leq m$ entspricht $m \geq n$. Mit den Notationen der Aussagenlogik gilt

$$m = n \quad \Leftrightarrow \quad (m \leqslant n) \wedge (m \geqslant n)$$

Natürlichen Zahlen werden im Sinne der Abzählung addiert, d.h. zwei Mengen mit den Anzahlen n und m von Objekten werden zu einer Menge zusammengefasst, die $m + n$ Objekte besitzt.

$$a + b = b + a \qquad \text{– das Kommutativgesetz}$$

$$(a + b) + c = a + (b + c) \qquad \text{– das Assoziativgesetz}$$

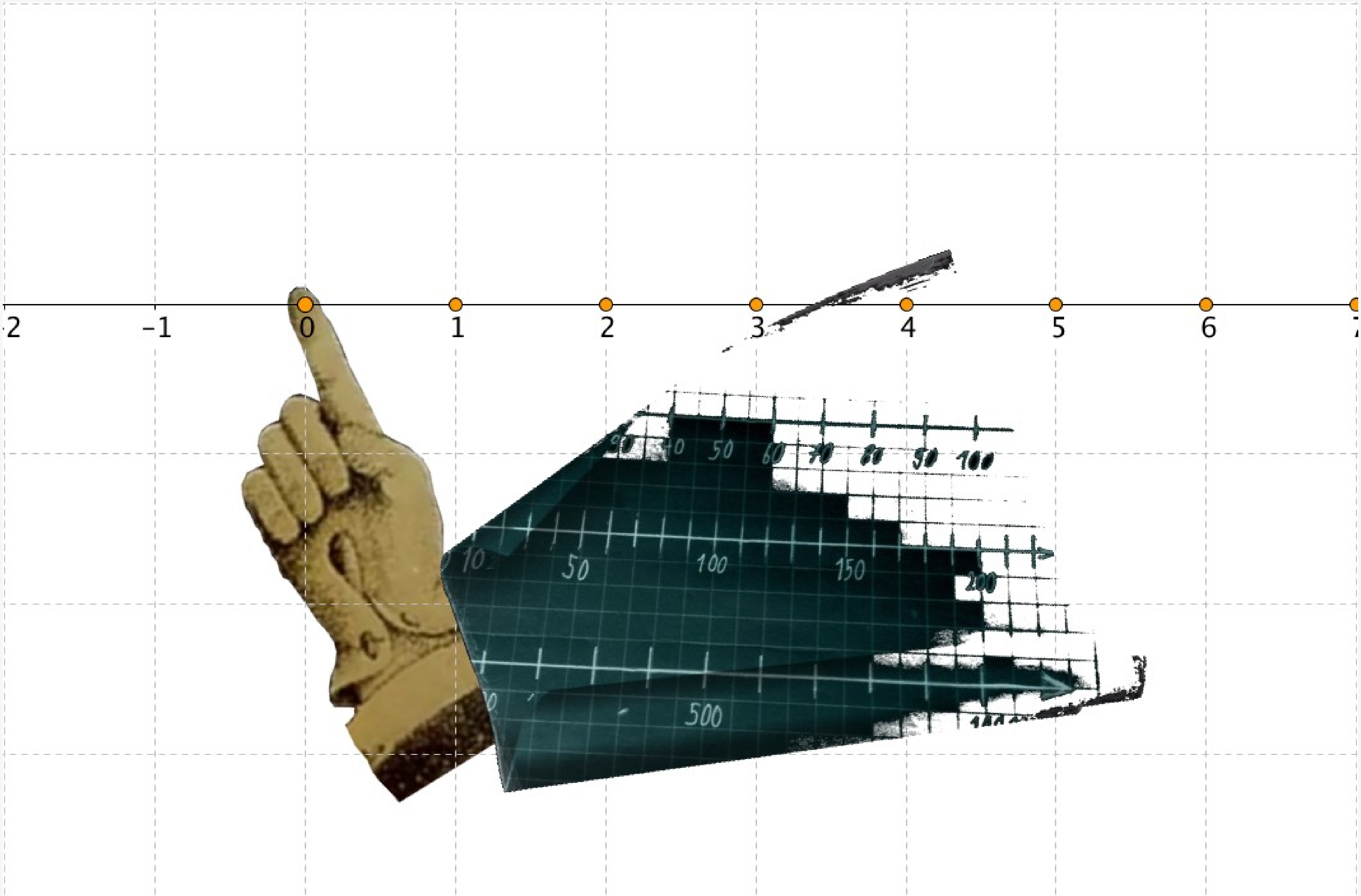


Abb.: Darstellung der natürlichen Zahlen auf der Zahlengerade

Definition:

Die Multiplikation zweier natürlichen Zahlen a, b wird definiert als

$$a \cdot b = \underbrace{b + b + b + \ldots + b}_{a - mal}$$

$$a \cdot b = \underbrace{a + a + a + \ldots + a}_{b - mal}$$

a und b heißen Faktoren des Produkts $a \bullet b$.

$a \bullet b = b \bullet a$ – das Kommutativgesetz

$(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$ – das Assoziativgesetz

Das Element 0 nimmt eine besonderve Rolle in der Menge der natürlichen Zahlen ein, da es den Wert einer Zahl a bei Addition nicht verändert:

$$a + 0 = a$$

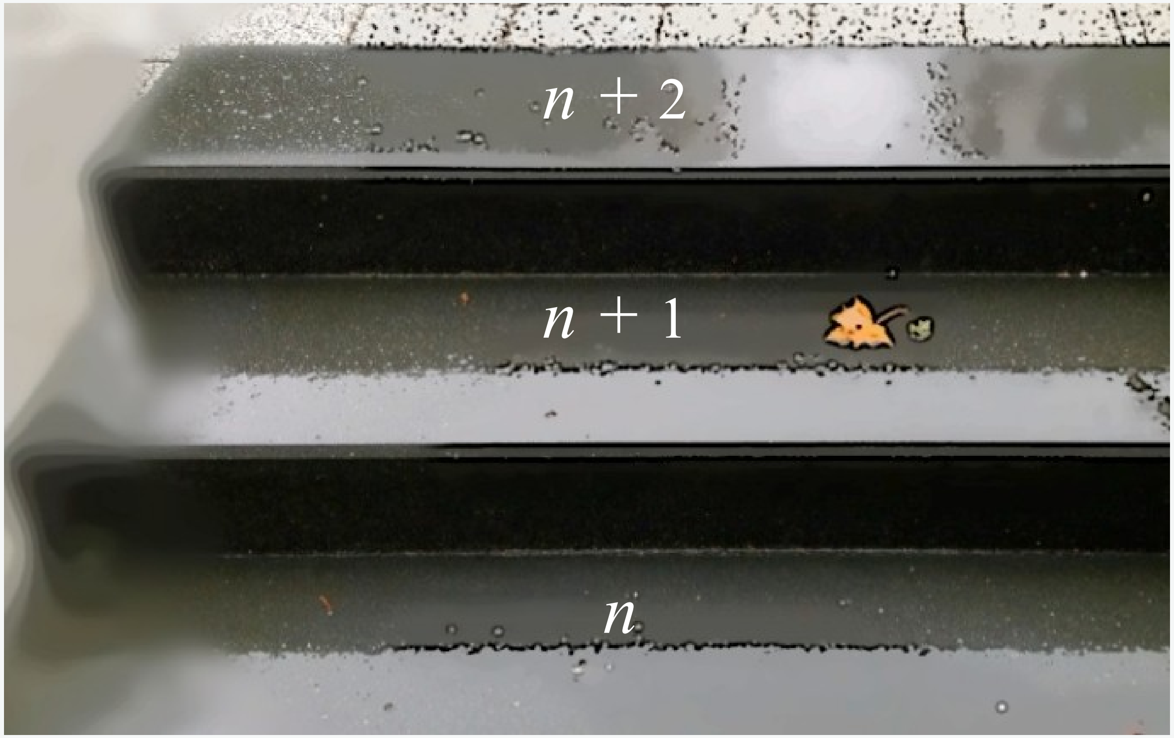
Eine Zahl b, die zu a addiert die Zahl 0 liefert, gibt es allerdings nicht. D.h., dass eine Addition mit

$$a\,, b \in \mathbb{N}\,, \quad a\,, b \neq 0, \qquad a + b = 0$$

in der Menge der natürlichen Zahlen nicht ausführbar ist.

Die Subtraktion ist innerhalb der Menge $\mathbb{N}$ nicht immer ausführbar:

$$27 - 5 = 22 \in \mathbb{N}\,, \qquad 5 - 27 = -22 \notin \mathbb{N}$$



Die Erkenntnis, dass das Zählen durch Hinzufügen von 1 immer weiter fortgesetzt werden kann, d.h. die Erkenntnis, dass es zu jeder natürlichen Zahl n eine natürliche Zahl $n + 1$ gibt, ist ein wichtiger Schritt in der Entwicklung eines Menschen. Bei jeder natürlichen Zahl, die man als größte natürliche Zahl bezeichnen würde, könnte man 1 hinzufügen und behaupten, dass diese Zahl größer sei, und man müsste zugeben, dass es keine größte natürliche Zahl geben kann.

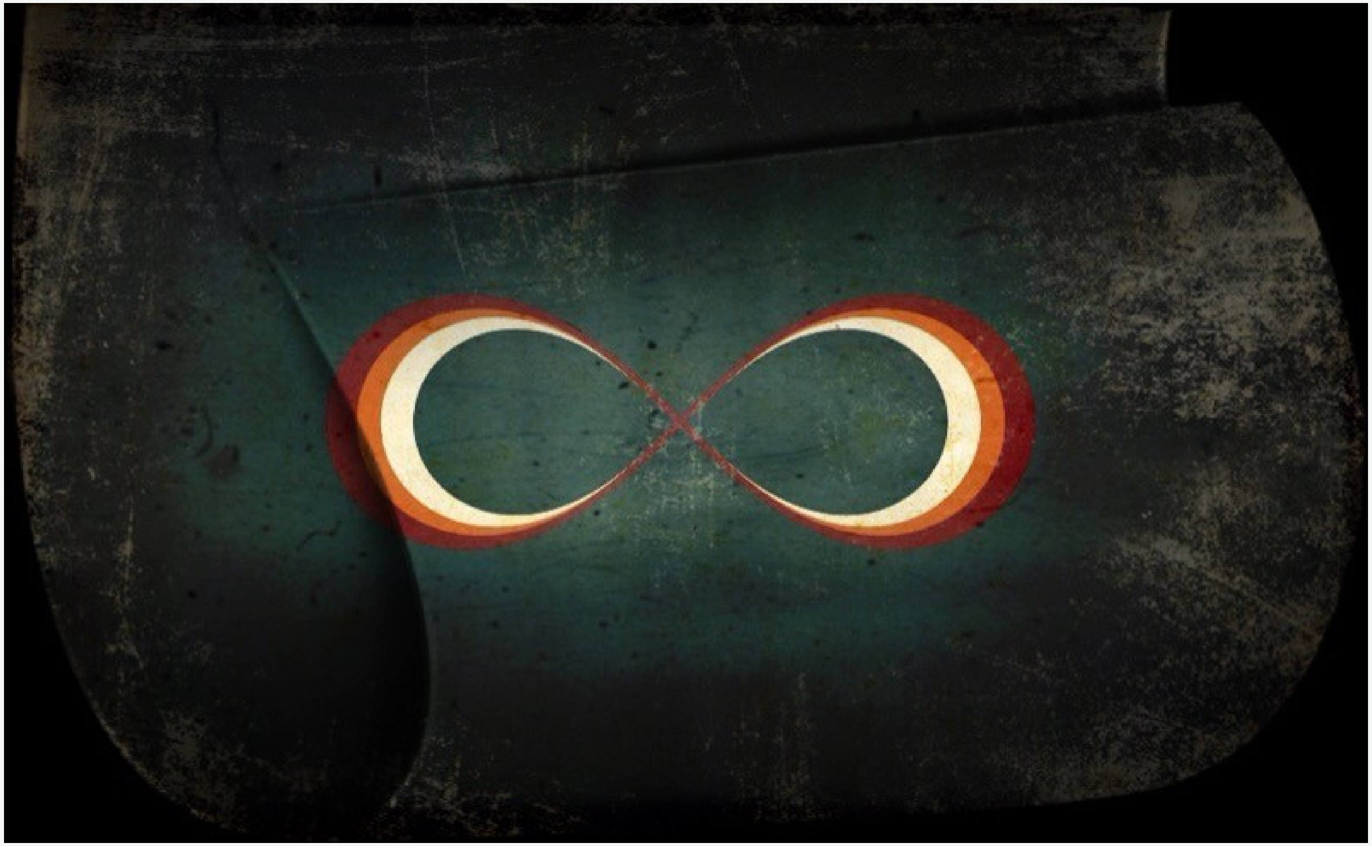


Abb: Symbol der Unendlichkeit

Die Vorstellung, dass es prinzipiell keine größte natürliche Zahl geben kann, ist mit dem Begriff der Unendlichkeit verbunden. Die Menge der natürlichen Zahlen ist unendlich groß. Wir können immer weiter zählen und beliebig oft aufhören, um wiederum 1 hinzuzufügen. Die Unendlichkeit bedeutet, dass wir nie an ein Ende kommen. Unendlich viele Schritte bedeutet, dass wir unabhängig von der Zahl der Schritte, die wir schon gemacht haben, die Möglichkeit haben einen weiteren Schritt zu tun.

$$12 - 19 = -7 \notin \mathbb{N}$$

Um solche Situationen behandeln zu können, wurde das Zahlensystem durch die negativen Zahlen erweitert (zuerst in chinesischer Literatur erwähnt).

Die negativen Zahlen (. . . , - 3, -2, -1) erweitern den Bereich der natürlichen Zahlen zu den ganzen Zahlen

$$\mathbb{Z} = \{ 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, ... \} \; - \text{ ganze Zahlen}$$

$$\mathbb{Z} = \{ \ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots \}$$

Negative Zahlen sind ein Selbstwiderspruch, wie alle Mathematiker zugeben.

Hans Vaihinger (1852-1933)

Erst im 19. Jahrhundert fanden die negativen Zahlen bei allen Mathematikern Anerkennung.

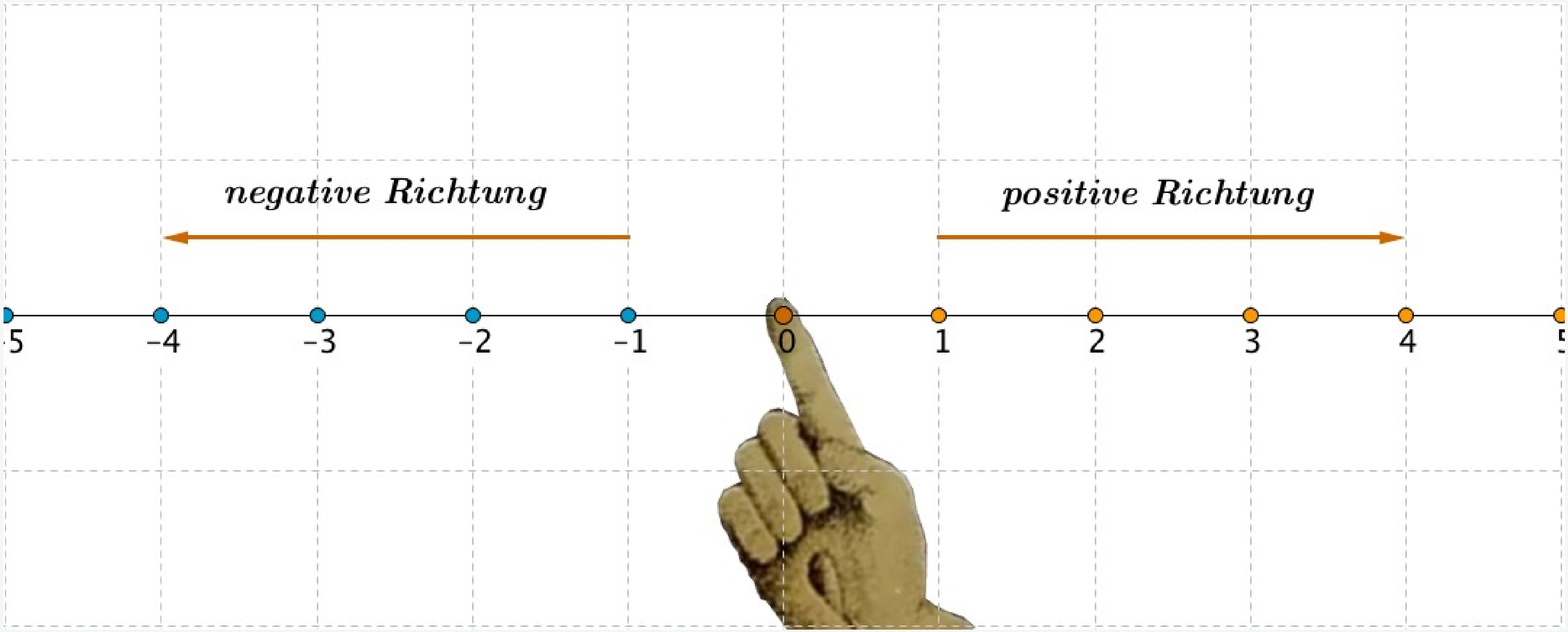


Abb. 1-1: Darstellung der ganzen Zahlen auf der Zahlengerade

Die ganzen Zahlen können auf einer Zahlengeraden dargestellt werden. Der Zahlenstrahl der natürlichen Zahlen wird nach links erweitert und wir markieren den Punkt links von 0 im Abstand einer Einheit mit - 1.

Man kann sagen, dass die negativen Zahlen -1, -2, . . . aus den natürlichen Zahlen 1, 2, . . . durch eine Spiegelung an 0 konstruiert werden, wobei jede natürliche Zahl n zum Spiegelbild - n wird. Somit können wir auch sagen, dass wir die Zahlengerade durch Spiegelung an 0 aus dem Zahlenstrahl konstruiert haben.

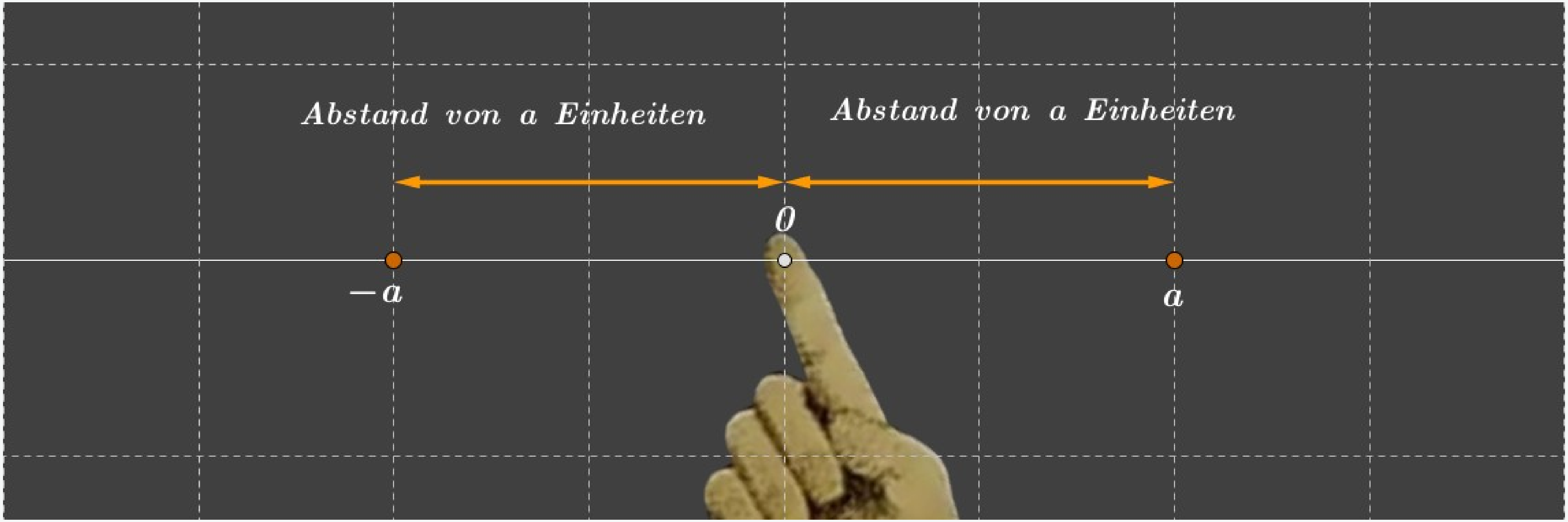


Abb 1-2: Zur Darstellung des Betrags einer Zahl a

Am Zahlenstrahl wird der Betrag einer Zahl a als Abstand zum Nullpunkt definiert.

Definition:

Der Betrag $|\,a\,|$ einer Zahl a definiert als $|\,a\,| = \begin{cases} a, & a \geqslant 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$

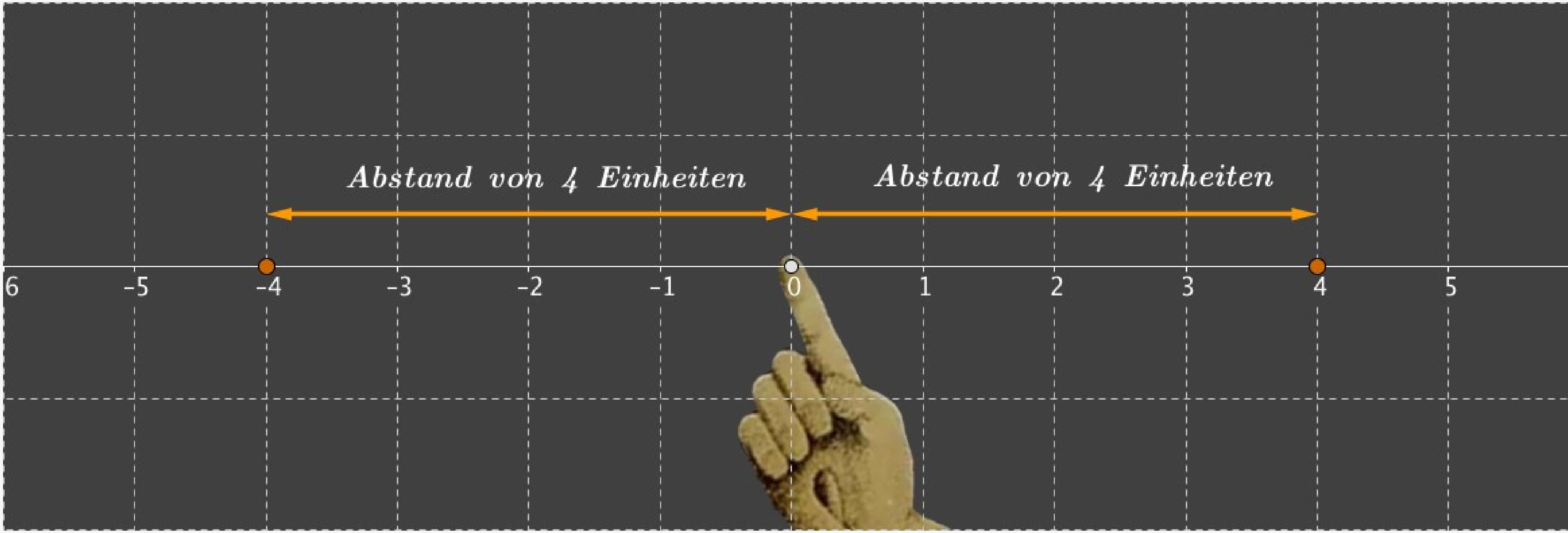


Abb 1-3: Graphische Darstellung der Gleichung $|x| = 4$

$$|x| = 4, \qquad x_1 = -4, \qquad x_2 = 4$$

Die Menge der ganzen Zahlen hat folgende Strukturen und Verknüpfungen:

- Addition: $-19 + 12 = -7, \quad -32 + (-6) = -38$
- Multiplikation: $-6 \cdot (-5) = 30, \quad 4 \cdot (-9) = -36$
- Subtraktion (Existenz von additiven Inversen): $12 - (-6) = 18$

Unterschied von der Menge der natürlichen Zahlen:

Zu jeder ganzen Zahl a gibt es eine eindeutig bestimmte ganze Zahl b, so dass $a + b = 0, \quad b = -a$. b nennt man dann das additive Inverse von a.

- Ordnungsrelation: $-16 < -9, \quad 4 > -9$

Die Division ist auf der Menge der ganzen Zahlen nicht immer ausführbar:

$$6 : 3 = 2 \in \mathbb{Z}, \qquad 3 : 6 = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$$